EUCLIDE — IL PRIMO LIBRO DEGLI ELEMENTI,

TESTO GRECO, VERSIONE ITALIANA, INTRODUZIONE E NOTE, A CURA DI

GIOVANNI VACCA, CON PREFAZIONE DI NICOLA FESTA.

ἴσμεν που ὅτι τῷ ὅλῳ καὶ παντὶ
διοίσει ἡμμένος τε γεωμετρίας καὶ μή
PLATONE, *Repubblica* VII, 9

Firenze, G. C. Sansoni, Editore – MCMXVI.

PREFAZIONE

Molto spesso avviene che libri moderni di argomento scientifico abbiano, almeno a guisa d'introduzione, pagine relative alla storia delle ricerche compiute fin dall'antichità in quel dato campo di studi, e in tali pagine si parli piú o meno diffusamente della scienza greca. Ma non sembra altrettanto frequente il caso che simili riassunti storici rivelino, non dico vedute originali, ma almeno segni manifesti di una conoscenza diretta delle cose di cui parlano i loro autori. Si direbbe che il rigore scientifico sia, per tacito consenso di chi scrive e di chi legge, richiesto solo nelle pagine successive, mentre nella parte storica sia lecito riassumere o copiare senza soverchio scrupolo da qualsiasi manuale o enciclopedia.

Una conseguenza di tal modo di procedere – dico una conseguenza, e potrei dire: un motivo – è che nella generalità dei dotti e semidotti si parla, sí, di

scienza greca, perché non se ne può fare a meno, ma si è piuttosto lontani dal valutare a dovere la grandezza e l'importanza di essa. È, per esempio, abbastanza diffuso uno storto giudizio su quello che costituisce, per cosí dire, il debito della civiltà moderna verso i Greci; perché molti credono in buona fede che solo nella poesia e nell'arte, e un tantino nella filosofia (a che Platone e Aristotele, in fin dei conti, se tutta la filosofia moderna comincia da Kant? e torna irresistibilmente a Kant come una farfalla che svolazza intorno a un lume?), fuori, dico, di quei campi non abbiamo bisogno d'imparare niente dai greci, né questi insegnarono mai niente d'importante al genere umano.*

Ed è curioso osservare come questo errore sia stato e sia favorito anche dai cultori stessi degli studi classici, per un esagerato amore ai capolavori letterari e per un ostentato disprezzo degli altri elementi che a buon diritto debbono far parte di una « scienza dell'antichità » veramente degna di questo nome. La cosa comincia a diventare grottesca in

* Tra quelli - pochi invero anche fuori d'Italia, dove sono pochissimi - che hanno levato la voce contro questo pregiudizio, va messo in prima linea, il venerando J. P. Mahaffy, il cui libro *What have the Greeks done for modern civilisation?* (New York-London 1909) merita di trovare anche in Italia molti lettori. Una traduzione sarà pubblicata fra breve dall' editore Sansoni.

questi ultimi tempi, in cui ci tocca sentire qualche rappresentante ufficiale dell' insegnamento classico superiore, trinceratosi opportunamente fra le grancasse dei futuristi, tuonare anche contro la filologia in senso stretto, e predicare che fuori della letteratura non c'è altro. Il che, se fosse preso sul serio – e il pericolo non è certo lontano – porterebbe a dar ragione ai nemici del classicismo, ai quali sembra che tutto il godimento intellettuale dato dalle opere letterarie non compensi la fatica necessaria per poterle studiare direttamente, e che si faccia piú presto a servirsi di traduzioni.

Si dovrebbe comprendere che tutto l'amore per i grandi classici – se non è, come amore, addirittura cieco – non esige affatto il disprezzo o l'ignoranza di certe opere modeste che il classicista fanatico non legge e distruggerebbe volentieri per non lasciarle leggere agli altri. Anzi, se amore è, qui piú che altrove, fatto di conoscenza e d'intimità, è chiaro che andare molto addentro nella intelligenza dei classici è il fine prossimo di tutti i nostri studi. Ma tutti sanno che a questo fine si appresserà prima e meglio degli altri chi non avrà trascurato di conoscere quanto piú è possibile lo stato generale della cultura e le forme e gli atteggiamenti particolari del pensiero, in mezzo ai quali vissero gli autori delle grandi opere artistiche e letterarie. Ora, una storia della cultura – ch' è dunque in fondo il presupposto

indispensabile anche della storia letteraria e della critica estetica - come si può tentare trascurando, non dico tutte le manifestazioni secondarie - non inutili mai, anche se piccole e minime, - ma tutto il campo della investigazione e produzione scientifica e gli scritti destinati a divulgare la scienza?

*
* *

A parte questo contributo importante alla conoscenza complessiva della cultura antica, la scienza ellenica, pur cosí mutila come è giunta a noi, si presenta fornita di pregi intrinseci tali, che merita di essere studiata per se stessa non meno che la letteratura e l'arte. Perfino tra i torbidi rivoli della falsa scienza, come nell' astrologia, nell' alchimia, nella fisiognomonica, scorrono qua e là vene purissime di genialità e di pensiero profondo; sicché il tempo, vecchio burlone, ha presentato - forse presenterà ancora - qualche volta come scoperte scientifiche modernissime, certe osservazioni e teorie, che giacevano da secoli in mezzo a quel materiale coperto dall' oblío e dal disprezzo. Ma nei campi della matematica, della medicina, della geografia, per non dir altro, ci sono opere greche degne di attirare anche oggi l'attenzione dei dotti e delle persone colte, se non per la materia, almeno per il metodo della ricerca e per la forma dell'esposi-

zione. Per questo io mi rallegro col valoroso editore fiorentino che in questi momenti difficili non esita a dare alla luce questo volume, e mi auguro ch' egli non si fermi qui, ma dia all' Italia tutta una serie di volumi adatti come questo ad iniziare alla conoscenza diretta della scienza greca ogni persona mediocremente colta e modestamente volenterosa.

Il mio collega Giovanni Vacca - un uomo al quale, se fosse vissuto ai tempi di Aristotele, sarebbe stato attribuito per comune consenso l'epiteto di *φιλομαθέστατος*, tanto è l'ardore di sapere che lo spinge allo studio delle materie più disparate e nei campi più remoti e difficili, - curando con intelligenza ed amore questo volume, ha mostrato in pratica molto bene quali debbano essere le doti proprie delle pubblicazioni di questo genere. Ciò che trattiene molti dalla lettura dei libri antichi è sopratutto la difficoltà della lingua; e a ciò provvede la traduzione fedele e garbata, a cui si rivolgerà di tanto in tanto chi non ha forze sufficienti per intendere subito il testo da sé, e di cui potrà servirsi anche chi non conosce affatto il greco. Ai giovani del ginnasio classico sarà gradito certamente trovarsi, senza troppa fatica, in grado di fare in greco la dimostrazione di un teorema. Può essere un primo passo a quel rinnovamento degli studi classici, che dovrà portare vita nella scuola

classica, senza bisogno di ridurre la grammatica greca al metodo Berlitz.

Per gli alunni di altre scuole – anche se l'educazione umanistica sia in essi tanto rudimentale da non permettere loro di gustare la tipica bellezza del ragionamento euclideo – il Vacca ha raccolto nella prefazione e nelle note notizie utili ad ognuno che non voglia o dire spropositi o non sapere aprir bocca in materia di storia della scienza. A me che ho scorso con piacere e con profitto le pagine di questo libro, sia concesso di rallegrarmi col Vacca e sperare che egli sia non solo il primo, ma anche uno dei piú attivi collaboratori della collezione che, secondo i miei voti, si inaugura appunto con questo volume.

Roma, 16 novembre 1915.

NICOLA FESTA.

INTRODUZIONE

1. Poco assai si conosce della vita di Euclide. Proclo da Bisanzio (il quale visse dal 412 al 485 d. Cr.) riferisce che « Euclide compilò i suoi *Ele-* « *menti* raccogliendo molti teoremi di Eudosso, « perfezionandone molti di Teeteto, e completando « con dimostrazioni esatte ciò che i suoi predeces- « sori avevano lasciato di incompleto. Euclide visse « al tempo del primo Tolomeo (il quale regnò dal « 306 al 283 av. Cr.). Poiché Archimede, il quale « venne subito dopo, parla di Euclide; ed inoltre « si dice che avendogli una volta Tolomeo chiesto « se vi fosse in geometria una via piú breve de- « gli *Elementi*, rispose che in geometria non vi sono « vie regie ».

Euclide sembra avesse studiato in Atene tra i discepoli di Platone. Fondò poi ad Alessandria una scuola ed ebbe tra i suoi discepoli Apollonio da Perga.

Si racconta infine che un tale, avendo cominciato a studiare geometria con Euclide, dopo aver

studiato il primo teorema gli chiese: « Ma che guadagnerò imparando queste cose? » e che Euclide, chiamato il suo schiavo, rispondesse: « Dagli tre denari, poiché egli vuol trar guadagno da ciò che apprende ».

2. Allorquando Euclide scriveva, la geometria greca aveva già tre secoli di vita.

Era nata, come il nome stesso indica (*agrimensura*, misura dei campi), e come gli scrittori greci, concordi, riferiscono, per bisogni pratici, in Egitto.

D'altra parte il bisogno di rendersi conto e di descrivere i fenomeni celesti aveva già condotto i Babilonesi e gli Egiziani alla scoperta delle prime verità aritmetiche e geometriche.

Talete da Mileto, nato intorno al 625 av. Cr., Fenicio di origine (Erodoto I, 170), è il primo scrittore greco di matematica. Sembra che egli abbia predetto l'eclisse di sole del 28 maggio 585 av. Cr., utilizzando alcune nozioni assai semplici sulla periodicità delle eclissi, scoperte dagli astronomi Babilonesi.[1] Plutarco (Solon. vit. c. 2; de

[1] G. Schiaparelli, nei suoi importanti scritti: *I primordi e i progressi dell'astronomia presso i Babilonesi*. (Scientia, Rivista di scienza, Bologna 1908, vol. III pagine 213–259, vol. IV p. 24–54), ha dimostrato che le conoscenze astronomiche dei Babilonesi erano assai imperfette. I loro calcoli erano quasi soltanto interpolazioni aritmetiche, ed essi non capirono mai come la geometria fosse necessaria per risolvere con precisione i problemi astronomici.

Ai tempi di Talete essi ignoravano ancora il periodo di 223 lunazioni detto *saros*, che regola approssimativamente

plac. phil. I, c. 3) dice che Talete era un negoziante, e che viaggiò a lungo in Egitto, dove egli apprese probabilmente le prime nozioni geometriche.[1] I suoi scritti sono perduti. Proclo gli attribuisce le prop. 15 e 22 del primo libro di Euclide.

Pitagora da Samo (nato intorno al 570, morto a Metaponto intorno al 470 av. Cr.) dopo aver a lungo viaggiato in Egitto e in Babilonia, fondò a Crotone una scuola. Nessuno scritto ci resta di lui. Gli si attribuisce da Plutarco e da Proclo la prop. 47 del primo libro di Euclide.

Ed ai Pitagorici si attribuiscono le prop. 32 e 44 dello stesso libro.

Durante i due secoli seguenti, nella Grecia stessa, nelle isole e nelle coste dell'Asia minore, in Egitto, nelle colonie greche dell'Italia, la geometria, l'aritmetica, l'astronomia si svilupparono e crebbero tanto da superare di gran lunga quanto ogni altro popolo dell'antichità aveva scoperto in queste scienze. Basti ricordare soltanto i nomi di

---

il ritorno delle eclissi, ma probabilmente, avevano soltanto osservato che le eclissi lunari si seguono regolarmente a intervalli di quasi sempre 17 lunazioni senza eclissi, seguite da una serie di cinque o sei eclissi, separate da sei lunazioni ciascuna. Le cinque o sei eclissi sono una o due parziali, due totali, una o due parziali.

Ma soltanto assai più tardi gli astronomi greci riuscirono a prevedere col calcolo le eclissi lunari e solari, liberando gli uomini dai terrori e dalle inquietudini che questi fenomeni producevano.

[1] Cfr. Iamblichi, *De communi mathematica scientia* XXI, ed. Festa, Lipsia. Teubner. 1891 p. 66.

Anassagora, di Enopide da Chio, al quale si attribuiscono le prop. 12 e 13 del I libro di Euclide, di Zenone da Elea, di Ippocrate da Chio, di Teodoro da Cirene, di Teeteto da Eraclea, di Archita da Taranto, amico di Platone; di Eudosso da Cnido, scolaro di Archita e di Platone; di Eudemo da Rodi, scolaro di Aristotele, di Pitea da Marsiglia.

É difficile poter spiegare come mai la matematica greca si sia tanto rapidamente sviluppata, in modo da superare di gran lunga quella di tutti gli altri popoli. Anche per la matematica accade in Grecia ciò che accade per le arti belle, per la poesia, per la storia, per la filosofia: i Greci sono primi tra i loro contemporanei e poi i nostri maestri.

È da notare però che il considerevole sviluppo della matematica in Grecia nel VI e nel V secolo, procede di pari passo, e forse è in parte la conseguenza, dei progressi della tecnica.[1]

Erodoto (III, 60) ricorda come una costruzione veramente maravigliosa, l'acquedotto di Samo, il quale comprendeva una galleria di un chilometro e mezzo (sette stadi di lunghezza), costruito dall'architetto Megarese Eupalino nel VI sec. av. Cr. La costruzione di questa galleria, cominciata, come sembra, ai due imbocchi contemporaneamente, esi-

---

[1] Da un' interessante conferenza di H. Diels, *Wissenschaft und Technik bei den Hellenen*, Neue Jahrbücher für das classische Altertum, Berlin, Teubner 1914, I, p. 1–17, tolgo alcune delle citazioni seguenti.

geva l'uso di molte e svariate cognizioni matematiche. La scienza delle costruzioni navali (tanta parte ebbe il mare nella vita del popolo greco), l'arte di navigare e la conseguente necessità di conoscere la configurazione dei mari, spiegano come già ANASSIMANDRO da Mileto avesse costruito per i naviganti una carta celeste ed una terrestre.

L'arsenale costruito al Pireo esisteva già da due secoli ai tempi d'ARCHIMEDE. Cosicché le sue opere, sulle quali ancor oggi sono fondate le teorie dei moderni costruttori navali, sono forse il coronamento di una lunga serie di tentativi e di esperimenti.

Il ponte di navi sul Bosforo costruito per ordine di Dario dall'architetto MANDROCLE da Samo (ERODOTO IV, 87-88), o il ponte sull' Ellesponto costruito per ordine di Serse (ERODOTO, VII, 34) furono opere di cui ancor oggi sarebbero fieri i capi dei nostri moderni eserciti.

L'arte militare[1] pure contribuì al progresso della meccanica. Le macchine belliche, balliste, catapulte, etc. furono già adoperate dai Greci di Sicilia sotto Dionisio il vecchio (400 av. Cr.), ed è probabilmente anche a causa dei progressi della tecnica militare greca che la Sicilia resisté per molti secoli contro i Cartaginesi.

---

[1] PLATONE nella *Repubblica* (VII, 9) rileva la evidente utilità della geometria nell'arte della guerra, nel tracciare gli accampamenti, nell'assedio delle fortezze, nella concentrazione e lo spiegamento dell'esercito, etc.

Cosí il primo trattato di meccanica (oggi perduto) di Archita da Taranto (429-348 av. Cr.) avrebbe contenuto la prima descrizione delle macchine semplici, e le loro proprietà, forse in seguito all'uso osservato nell'arte militare. Come è noto che nel continuo uso e nella complicazione dell'artiglieria del sec. XV si deve ricercare la origine delle speculazioni sul moto dei corpi di Tartaglia e di Galileo.

3. Chi legge la piú bella delle commedie antiche, *gli uccelli* di Aristofane, rappresentata per la prima volta nel 414 av. Cr., ed osserva come sia posto in ridicolo il geometra Metone (v. 992-1020) facendogli fare un discorso privo di senso, ma composto di frasi tecniche della matematica (egli si offre di misurare il cielo con i suoi strumenti, di far diventare un circolo quadrato,...), deve concludere che già fin d'allora la geometria doveva aver destato l'attenzione non solo di pochi ricercatori ma del popolo, poiché altrimenti gli spettatori non avrebbero potuto sentire la comicità della scena.

Ai tempi di Platone (il quale visse dal 429 al 348 av. Cr.) la geometria aveva già acquistato la fisionomia che essa ha ai nostri giorni. « I geometri, egli dice nella *Repubblica* (VI, 20) suppongono che esistano le *figure*, *tre specie di angoli*, e fanno altre supposizioni di questo genere, secondo le dimostrazioni a cui mirano; e delle ipotesi fatte non danno ragione né a se stessi, né agli altri, considerandole completamente evidenti; e partendo

da queste, ordinatamente dimostrano tutto il resto, per giungere fino a quello che avevano in animo di dimostrare. Essi si servono perciò di figure visibili, e ad esse applicano i loro ragionamenti, sebbene non sia ad esse che essi pensano, ma a quelle di cui queste sono l'immagine, facendo essi i loro ragionamenti sul quadrato ed un suo diametro, ma non su quello che essi disegnano; e così tutte le altre figure che formano o che disegnano, ed anche le loro ombre e le loro immagini nell'acqua, tutte le adoperano come immagini, cercando di rappresentar quelle che non sono visibili che dalla mente... ».

4. Si è perduta una storia delle matematiche scritte da Eudemo da Rodi, e dobbiamo dolercene, poiché da essa specialmente attinsero gli scrittori greci della decadenza le magre notizie che ci son rimaste sulla storia dei primordii della geometria greca.

Sulla storia della geometria greca prima di Euclide sono da consultarsi:

C. A. Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor Euklides*, Leipzig, Teubner, 1870.

M. Cantor, *Geschichte der Mathematik,* Leipzig, Teubner, III edizione, vol. I, 1907.

P. Tannery, *Mémoires scientifiques*, vol. I e II *Sciences exactes dans l'antiquité*, Paris, Gauthier Villars 1912.

G. Loria, *Le scienze esatte nell' antica Grecia*, II ediz. Milano, Hoepli, 1914.

Per uno sguardo complessivo allo sviluppo delle scienze in Grecia si consulti:

A. Cosattini, *Letture ed appunti sulla storia della civiltà greca*, Roma, Albrighi e Segati, 1910, vol. II, pp. 101–195.

5. Gli elementi di Euclide sono stati adoperati dagli antichi, e quasi senza interruzione fino ai giorni nostri. Nessun altro libro è stato forse mai studiato con tanta continuità, ed accolto con tanto interesse. Allorché nel 1608, l'italiano Matteo Ricci a Pechino tradusse in cinese i primi sei libri di Euclide, essi destarono maggior ammirazione di ogni altra cognizione europea.

La redazione che noi possediamo è in gran parte dovuta a Teone Alessandrino (il quale visse nel IV secolo d. Cr.). Alcuni frammenti di papiri di *Ercolano*, di *Oxyrhyncus* e del *Fayum* permisero al filologo danese Heiberg [1] di ristabilire, in parte, il testo di Euclide quale lo conosceva Erone Alessandrino, tre secoli dopo Euclide, cioè al principio dell'era volgare.

Noi possediamo oggi, grazie all'acume critico, e all'assiduo lavoro di molti anni, di J. L. Heiberg, una edizione ottima del testo greco, ed una versione latina a fronte.

---

[1] J. L. Heiberg, *Euclidis, Opera Omnia,* Leipzig, Teubner, 1883-1888 in sette volumi.

Sono inoltre a consultarsi:

J. L. Heiberg, *Litterargeschichtliche Studien über Euklid*, 1882.

J. L. Heiberg, *Paralipomena zu Euklid,* Hermes, XXXVIII, 1903.

J. L. Heiberg, *Mathemat. zu Aristoteles*, Abhandl. zur Gesch. d. math. Wissenschaften. XVIII Heft, 1904 pp. 1–49.

Innumerevoli sono le edizioni e le versioni di Euclide.[1] Accennerò soltanto ad alcune.

Celebre in tutto il medio evo fu la versione latina di Giovanni Campano, da Novara, il quale visse nel secolo XIII, e fu matematico profondo ed acuto.[2]

Ebbe pure grande celebrità, ed è veramente notevole dal punto di vista matematico, se non da quello filologico, la versione italiana di Nicolò Tartaglia, pubblicata da lui nel 1543 e poi più volte ristampata.

La più soddisfacente versione latina, fino ai tempi moderni, fu quella di Federico Commandino da Urbino (1509-1575), pubblicata a Pesaro nel 1572.

È infine da ricordare che, dopo l'edizione sopracitata di Heiberg, una nuova versione inglese in tre grandi volumi di T. L. Heath, stampata a Cambridge (University Press) nel 1908, ricca di numerosi commenti e di elaborate introduzioni, offre agli studiosi che conoscono la lingua inglese, una ricca miniera di informazioni. Essa mi è stata utile per la compilazione di alcune delle note che seguono.

6. In questa edizione del primo libro di Euclide, col testo greco riprodotto dall'edizione di J. L.

[1] Pietro Riccardi, *Saggio di una Bibliografia Euclidea*, Bologna, 1887, 1888, 1890, 1893.

[2] Cfr. Angelo Genocchi, *Sopra tre scritti inediti di Leonardo Pisano, note analitiche*, Roma, 1855, p. 93.

Heiberg, a fronte di una nuova versione italiana, [1] mi son proposto anzitutto lo scopo di persuadere gli studenti che studiano greco, che Euclide non è difficile, ed a coloro che hanno paura del greco, che con gli sforzi di poche settimane si può provare il piacere di leggere Euclide nel testo originale.

Poiché si tratta di apprendere un centinaio di parole, una parte delle quali sono ancor vive nella lingua odierna, e poche forme grammaticali.

7. Il primo libro di Euclide insegna le costruzioni piú semplici, di un triangolo equilatero, di un quadrato (46). Insegna a bisecare un angolo (9), una retta (10), a condurre rette perpendicolari (11)-(14) e parallele (31) a rette date. Contiene inoltre una teoria degli angoli, dei triangoli, dei parallelogrammi ed i primi elementi della teoria dell'eguaglianza delle figure piane. Esso offre quindi in poche pagine, in una esposizione armonica, e ben concatenata una ricca messe di nozioni geometriche, forse piú che qualunque altro libro di geometria, antico o moderno.

Roma, Ottobre 1915.

G. Vacca.

---

[1] L'edizione di Enrico Betti e Francesco Brioschi, *Gli Elem. di Euclide,* Firenze, Le Monnier, 1867, è anteriore all'edizione definitiva del testo greco di J. L. Heiberg (1883). I due editori avevano preso per base l'edizione di Viviani, scolaro di Galileo (1690) e quella di R. Simson (1756).

AVVERTENZA

Nella versione mi son mantenuto fedele al testo. Noterò che le frasi di Euclide: « A, B eguali a C », ovvero « A, B eguali a C, D » nella lingua algebrica moderna si scrivono: $A + B = C$, $A + B = C + D$. Invece la frase « A, B sono eguali a C, D ciascuno a ciascuno », significa: $A = C$, $B = D$.

Il nome astratto *somma* non si trova in Euclide.

Questo modo di dire di Euclide ha forse, indirettamente, dato origine al nostro simbolo $+$ il quale, secondo le piú probabili ipotesi, è soltanto una abbreviazione della particella *et*.

Nella nota alla proposizione (35) si troveranno le ragioni per cui credo che alla classica parola *eguale* convenga conservare il suo senso primitivo, anziché introdurre la parola *equivalente* proposta da *Legendre*.

Nelle note alle proposizioni (18) e (19) ho fatto uso di due delle notazioni del calcolo logico, e precisamente del segno - che si legge « *non* », e si pone innanzi ad una proposizione per negarla, e del segno ɔ che si legge « *consegue, si deduce, sono,...* » e si pone tra due proposizioni per dire che la seconda *si deduce* dalla prima, ovvero tra due classi, per dire che gli individui della prima classe *sono* individui anche della seconda classe.

Cosí ad esempio:

(Romani) ɔ (Italiani) . (Italiani) ɔ (Europei) . ɔ .
- (Europei) ɔ - (Romani)

I punti servono per separare le varie parti della proposizione.

Per maggiori notizie si consulti G. Peano, *Aritmetica generale ed Algebra Elem.* Torino, Paravia, 1902.

ΣΤΟΙΧΕΙΩΝ
Α

ELEMENTI
LIBRO I

α'.

Ὅροι.

α'. Σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐθέν.

β', Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.

γ'. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.

δ'. Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ ἑαυτῆς σημείοις κεῖται.

ε'. Ἐπιφάνεια δέ ἐστιν ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.

ϛ'. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

ζ'. Ἐπίπεδος ἐπιφάνειά ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείαις κεῖται.

η'. Ἐπίπεδος δὲ γωνία ἐστὶν ἡ ἐν ἐπιπέδῳ δύο γραμμῶν ἁπτομένων ἀλλήλων καὶ μὴ ἐπ' εὐθείας κειμένων πρὸς ἀλλήλας τῶν γραμμῶν κλίσις.

ϑ'. Ὅταν δὲ αἱ περιέχουσαι τὴν γωνίαν γραμμαὶ εὐθεῖαι ὦσιν, εὐθύγραμμος καλεῖται ἡ γωνία.

ι'. Ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστι, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

---

*) Traduco con *termini*, il greco *ὅροι* piuttosto che con *definizioni*, come si fa comunemente, perché queste prime pagine introduttorie, invece che *definizioni matematiche*, sono piuttosto chiarimenti o spiegazioni analoghe a quelle che si danno oggi nei dizionari. Queste prime pagine contenenti queste prime spiegazioni, i *postulati* e le *nozioni*

I.

Termini *

1. PUNTO è ciò che non ha parti.

2. LINEA una lunghezza senza larghezza.

3. ESTREMI DI UNA LINEA son punti.

4. LINEA RETTA è quella che è posta in pari rispetto ai suoi punti.

5. SUPERFICIE è ciò che ha soltanto lunghezza e larghezza.

6. ESTREMI DI UNA SUPERFICIE son linee.

7. SUPERFICIE PIANA è quella posta in pari rispetto alle sue rette.

8. ANGOLO PIANO è l'inclinazione di due linee in un piano che si toccano, ma non sono per diritto.

9. Quando le linee comprendenti un angolo son rette, l'angolo si chiama RETTILINEO.

10. Se una retta posta sopra una retta, fa gli angoli adiacenti eguali tra loro, ognuno dei due angoli eguali è RETTO, e la retta posta si chiama PERPENDICOLARE a quella su cui è stata posta.

---

comuni, sono state, con tutta probabilità, assai alterate e deformate durante i molti secoli nei quali questo libro fu adoperato nelle scuole. È lecito supporre che le pagine introduttorie originarie fossero tanto eleganti e sobrie quanto son quelle che si trovano premesse agli scritti di Archimede e di Apollonio.

ια'. Ἀμβλεῖα γωνία ἐστὶν ἡ μείζων ὀρθῆς.

ιβ'. Ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς.

ιγ'. Ὅρος ἐστὶν ὅ τινός ἐστι πέρας.

ιδ'. Σχῆμά ἐστι τὸ ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον.

ιε'. Κύκλος ἐστὶ σχῆμα ἐπίπεδον ὑπὸ μιᾶς γραμμῆς περιεχόμενον πρὸς ἣν ἀφ' ἑνὸς σημείου τῶν ἐντὸς τοῦ σχήματος κειμένων πᾶσαι αἱ προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

ις'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

ιζ'. Διάμετρος δὲ τοῦ κύκλου ἐστὶν εὐθεῖά τις διὰ τοῦ κέντρου ἠγμένη καὶ περατουμένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ὑπὸ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας, ἥτις καὶ δίχα τέμνει τὸν κύκλον.

ιη'. Ἡμικύκλιον δέ ἐστι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς περιφερείας. κέντρον δὲ τοῦ ἡμικυκλίου τὸ αὐτό, ὃ καὶ τοῦ κύκλου ἐστίν.

ιθ'. Σχήματα εὐθύγραμμά ἐστι τὰ ὑπὸ εὐθειῶν περιεχόμενα, τρίπλευρα μὲν τὰ ὑπὸ τριῶν, τετράπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ τεσσάρων, πολύπλευρα δὲ τὰ ὑπὸ πλειόνων ἢ τεσσάρων εὐθειῶν περιεχόμενα.

κ'. Τῶν δὲ τριπλεύρων σχημάτων ἰσόπλευρον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ τὰς τρεῖς ἴσας ἔχον πλευράς, ἰσοσκελὲς δὲ τὸ τὰς δύο μόνας ἴσας ἔχον πλευράς, σκαληνὸν δὲ τὸ τὰς τρεῖς ἀνίσους ἔχον πλευράς.

κα'. Ἔτι δὲ τῶν τριπλεύρων σχημάτων ὀρθογώνιον μὲν τρίγωνόν ἐστι τὸ ἔχον ὀρθὴν γωνίαν, ἀμ-

---

[1] Si notino le inaspettate definizioni di triangolo *scaleno,* e di triangolo *acutangolo*, le quali obbligano su-

11. ANGOLO OTTUSO è quello maggiore di un retto.

12. ACUTO è quello minore di un retto.

13. TERMINE è l'estremo di qualche cosa.

14. FIGURA è ciò che è compreso da uno o più termini.

15. CIRCOLO è una figura piana, compresa da una sola linea, tale che tutte le rette condotte ad essa da un punto posto entro la figura, sono eguali tra loro.

16. CENTRO DEL CIRCOLO si chiama quel punto.

17. DIAMETRO DEL CIRCOLO è una retta condotta per il centro, e terminata ad ognuna delle parti alla circonferenza del circolo, la quale divide anche il circolo per metà.

18. SEMICIRCOLO è la figura compresa dal diametro e dalla circonferenza da esso tagliata.

Il centro del semicircolo è lo stesso del centro del circolo.

19. FIGURE RETTILINEE son quelle comprese da rette, TRILATERE da tre, QUADRILATERE da quattro, MULTILATERE quelle comprese da più di quattro.

20. Tra le figure trilatere è TRIANGOLO EQUILATERO quello che ha i tre lati eguali; ISOSCELE quello che ha due soli lati eguali; SCALENO quello che ha i tre lati diseguali.

21. Inoltre tra le figure trilatere, è TRIANGOLO RETTANGOLO quello che ha un angolo retto, OTTUSANGOLO quello che ha un angolo ottuso, ACUTANGOLO quello che ha i tre angoli acuti. [1]

---

bito a riflettere, chi per la prima volta sente parlare di geometria.

βλυγώνιον δὲ τὸ ἔχον ἀμβλεῖαν γωνίαν, ὀξυγώνιον δὲ τὸ τὰς τρεῖς ὀξείας ἔχον γωνίας.

κβ'. *Τῶν δὲ τετραπλεύρων σχημάτων τετράγωνον μέν ἐστιν ὃ ἰσόπλευρόν τέ ἐστι καὶ ὀρθογώνιον, ἑτερόμηκες δὲ ὃ ὀρθογώνιον μέν, οὐκ ἰσόπλευρον δέ, ῥόμβος δὲ ὃ ἰσόπλευρον μέν, οὐκ ὀρθογώνιον δέ, ῥομβοειδὲς δὲ τὸ τὰς ἀπεναντίον πλευράς τε καὶ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ἔχον, ὃ οὔτε ἰσόπλευρόν ἐστιν οὔτε ὀρθογώνιον· τὰ δὲ παρὰ ταῦτα τετράπλευρα τραπέζια καλείσθω.*

κγ'. *Παράλληλοί εἰσιν εὐθεῖαι αἵτινες ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ οὖσαι καὶ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ μηδέτερα συμπίπτουσιν ἀλλήλαις.*

Αἰτήματα.

α'. *Ἠιτήσθω ἀπὸ παντὸς σημείου ἐπὶ πᾶν σημεῖον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν·*

β'. *Καὶ πεπερασμένην εὐθεῖαν κατὰ τὸ συνεχὲς ἐπ' εὐθείας ἐκβαλεῖν·*

γ'. *Καὶ παντὶ κέντρῳ καὶ διαστήματι κύκλον γράφεσθαι·*

δ'. *Καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις εἶναι·*

ε'. *Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν*

---

[1] L'uso di chiamar *trapezii* i quadrilateri aventi due lati paralleli è posteriore ad Euclide.

[2] Si noti che dire che due rette nello stesso piano incontrate da un'altra retta, si incontrano tra loro, val quanto

22. Tra le figure quadrilatere è QUADRATO quella che è equilatera e rettangola; OBLUNGO quella che è rettangola ma non equilatera; ROMBO quella chè è equilatera ma non rettangola; ROMBOIDE quella che ha i lati e gli angoli opposti eguali tra loro, ma non è né equilatera, né rettangola; si chiamino TRAPEZII [1] tutti gli altri quadrilateri.

23. PARALLELE sono rette, le quali sono nello stesso piano, e prolungate all'infinito da ognuna delle due parti, da nessuna delle due parti si incontrano tra loro.[2]

Postulati.

1. Si ammetta di poter tirare da ogni punto ad ogni [altro] punto, una linea retta;

2. e di poter prolungare continuamente per diritto una linea retta terminata;

3. e con ogni centro e con ogni distanza, descrivere un circolo;

4. e che tutti gli angoli retti sono eguali tra loro;

5. e che se una retta incontrando due rette, fa gli angoli interni e dalla stessa parte minori

---

dire che le tre rette formano un triangolo; e che invece il dire che due rette nello stesso piano incontrate da una terza non s'incontrano tra loro, val quanto dire che esse sono parallele, ovvero val quanto dire che le tre rette non formano un triangolo.

ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Κοιναὶ ἔννοιαι.

α'. *Τὰ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα.*

β'. *Καὶ ἐὰν ἴσοις ἴσα προστεθῇ, τὰ ὅλα ἐστὶν ἴσα.*

γ'. *Καὶ ἐὰν ἀπὸ ἴσων ἴσα ἀφαιρεθῇ τὰ καταλειπόμενά ἐστιν ἴσα.*

δ'. *Καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.*

ε'. *Καὶ τὸ ὅλον τοῦ μέρους μεῖζον.*

---

[1] Questo postulato è adoperato per la prima volta nella proposizione (**29**).

[2] La parola *assiomi* non è adoperata da Euclide. Aristotile li aveva chiamati *κοιναὶ δόξαι*, *opinioni comuni*, suggerendo così forse la frase Euclidea.

[3] Euclide adopera nella (**4**) anche la proposizione inversa che cioè *cose eguali tra loro si possono sovrapporre l'una sull'altra*. La distinzione tra *eguaglianza* e *sovrapponibilità* è assai sottile.

Euclide però non fa una teoria generale della *sovrapposizione*. Una teoria completa della *congruenza* (ovvero sovrapponibilità delle figure) è stata costruita da Pasch, *Vorlesungen über neuere Geometrie*, Leipzig, 1882, ed esposta

di due retti, le due rette prolungate all'infinito, si incontrano da quella parte nella quale gli angoli son minori di due retti. [1]

Nozioni comuni.[2]

1. Le cose eguali ad una stessa, sono eguali tra loro.

2. E se a cose eguali si aggiungono cose eguali, i tutti sono eguali.

3. E se da cose eguali si tolgono cose eguali, i resti sono eguali.

4. E le cose sovrapponentisi l'una sull'altra, sono eguali tra loro. [3]

5. E il tutto è maggior della parte.

---

con molte semplificazioni da G. Peano, *Sui fondamenti della geometria*, Riv. di Mat., 1894, t. 4 p. 75 e segg.

A me sembra però preferibile, quando si voglia fare questa distinzione, conservare alla parola *eguali* il senso che essa ha nella logica, ricorrendo invece che alla creazione di una nuova *relazione* di *congruenza*, ad una frase un po' piú complessa come *eguali in forma, di egual figura*, etc.

Nelle citazioni, i *termini* si indicheranno cosí: (T **10**); i *postulati*, cosí: (P **3**); le *nozioni comuni* cosí (C **2**); e le *proposizioni* col semplice numero (**17**).

α'.

Ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ.

Δεῖ δὴ ἐπὶ τῆς ΑΒ εὐθείας τρίγωνον ἰσόπλευρον συστήσασθαι.

Κέντρῳ μὲν τῷ Α, διαστήματι δὲ τῷ ΑΒ κύκλος γεγράφθω ὁ ΒΓΔ, καὶ πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΑ κύκλος γεγράφθω ὁ ΑΓΕ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλους οἱ κύκλοι, ἐπὶ τὰ Α, Β σημεῖα ἐπεζεύχθωσαν εὐθεῖαι αἱ ΓΑ, ΓΒ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΔΒ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· πάλιν, ἐπεὶ τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΑΕ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΑ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΓΑ τῇ ΑΒ ἴση· ἑκατέρα ἄρα τῶν ΓΑ, ΓΒ τῇ ΑΒ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΓΑ ἄρα τῇ ΓΒ ἐστὶν ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα αἱ ΓΑ, ΑΒ, ΒΓ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

---

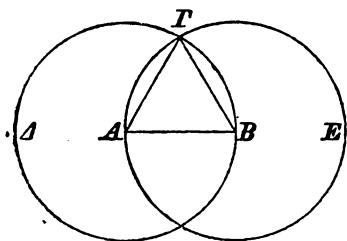
1. Si è obiettato a questa dimostrazione e a quella della successiva (**22**), che in esse Euclide ammette come evidente, che *se un circolo ha il centro su di un altro circolo, ed un punto interno ad esso, lo taglia.* Si è tentato di dimostrare recentemente questa proposizione per mezzo di altri postulati, assai più complicati. Sembra però più semplice l'am-

LIBRO PRIMO

1. — ***Sopra una retta data terminata, costruire un triangolo equilatero.***

Sia AB la retta data terminata.

Si deve sulla retta AB costruire un triangolo equilatero.

Con centro A e distanza AB si descriva (P 3) il circolo $B\Gamma\Delta$, e di nuovo con centro B e distanza BA si descriva (P 3) il circolo $A\Gamma E$, e dal punto Γ in cui i circoli si tagliano tra loro, si conducano (P 1) ai punti A, B le rette ΓA, ΓB.

E poiché il punto A è centro del circolo $\Gamma\Delta B$, la $A\Gamma$ è eguale (T 15) alla AB. E di nuovo, poiché il punto B è centro del circolo ΓAE, la $B\Gamma$ è eguale alla BA (T 15). Ma si è già dimostrato che ΓA è eguale alla AB. Dunque ognuna delle ΓA, ΓB è eguale alla AB. Ma cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro (C 1), dunque la ΓA è eguale alla ΓB. Dunque le tre ΓA, AB, $B\Gamma$ sono eguali tra loro.

---

mettere tacitamente questa proposizione, come parve evidente ad Euclide.

ἰσόπλευρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον. καὶ συνέσταται ἐπὶ τῆς δοθείσης εὐθείας πεπερασμένης τῆς ΑΒ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

β'.

Πρὸς τῷ δοθέντι σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴσην εὐθεῖαν θέσθαι.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου ἐπὶ τὸ Β σημεῖον εὐθεῖα ἡ ΑΒ, καὶ συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΑΒ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΔΑ, ΔΒ εὐθεῖαι αἱ ΑΕ, ΒΖ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Β διαστήματι δὲ τῷ ΒΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΗΘ, καὶ πάλιν κέντρῳ τῷ Δ καὶ διαστήματι τῷ ΔΗ κύκλος γεγράφθω ὁ ΗΚΛ.

Ἐπεὶ οὖν τὸ Β σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΓΗΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Δ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΗΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΔΛ τῇ ΔΗ, ὧν ἡ ΔΑ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. λοιπὴ ἄρα ἡ ΑΛ

---

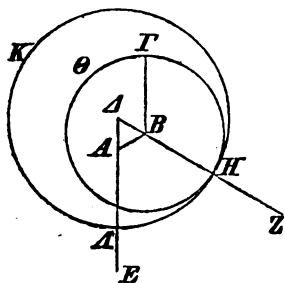
2. Questa proposizione ha molti casi, già analizzati da Proclo. A seconda della disposizione delle figure occorre cambiare alcune parole nella dimostrazione. Si può però sempre ridursi al caso esposto da Euclide. È infine da osservarsi che in altre proposizioni (per es. nella **7**) Euclide sviluppa soltanto il caso piú difficile.

L'interesse di questa proposizione è duplice. Essa è anzitutto una elegante applicazione della proposizione precedente e delle nozioni comuni. In secondo luogo essa rende

Dunque il triangolo $AB\Gamma$ è equilatero ed è costruito sulla retta data terminata AB, come dovevasi fare.

2. — *Ad un dato punto apporre una retta eguale ad una data retta.*

Sia A il punto dato, e sia $B\Gamma$ la retta data. Si deve al punto A apporre una retta eguale alla retta data $B\Gamma$.

Si conduca infatti dal punto A al punto B la retta AB (P **1**), e si costruisca su di essa il triangolo equilatero ΔAB (**1**), e si prolunghino per diritto (P**2**) alle ΔA, ΔB le rette AE, BZ, e con centro B e distanza $B\Gamma$ si descriva il circolo $\Gamma H\Theta$ (P **3**), ed ancora con centro Δ e distanza ΔH si descriva (P**3**) il circolo $HK\Lambda$.

Poiché il punto B è centro del circolo $\Gamma H\Theta$, la $B\Gamma$ è eguale alla BH. Ed ancora poiché il punto Δ è centro del circolo $HK\Gamma$, la $\Delta\Lambda$ è eguale alla ΔH, delle quali la parte ΔA è eguale alla ΔB. Dunque il resto $A\Lambda$ è eguale al resto BH (C **3**).

---

inutile il *trasporto* di una retta nel piano, potendosi supporre con A. De Morgan, che il *compasso* adoperato da Euclide, sia cosí fatto che chiuda le punte, appena cessi di toccar la carta, e che la *riga* sia cosí fatta che su di essa non si possano far segni.

λοιπῇ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΒΗ ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΔ, ΒΓ τῇ ΒΗ ἐστὶν ἴση. τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῷ δοθέντι σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ ἴση εὐθεῖα κεῖται ἡ ΑΔ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

γ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῇ ἐλάσσονι ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι ἄνισοι αἱ ΑΒ, Γ, ὧν μείζων ἔστω ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴσην εὐθεῖαν ἀφελεῖν.

Κείσθω πρὸς τῷ Α σημείῳ τῇ Γ εὐθείᾳ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Α διαστήματι δὲ τῷ ΑΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΕΖ.

Καὶ ἐπεὶ τὸ Α σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΕΖ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΑΔ· ἀλλὰ καὶ ἡ Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση. ἑκατέρα ἄρα τῶν ΑΕ, Γ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΕ τῇ Γ ἐστὶν ἴση.

Δύο ἄρα δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων τῶν ΑΒ, Γ ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάσσονι τῇ Γ ἴση ἀφῄρηται ἡ ΑΕ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

---

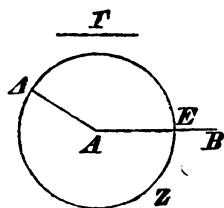
3. Lo scopo di questa proposizione, come quello della precedente, è di evitare il *trasporto* di una retta nel piano (poiché per mezzo di questo trasporto i problemi (2) e (3) si

Ma si è dimostrato che la $B\Gamma$ è eguale alla BH. Dunque ognuna delle due $A\Delta$, $B\Gamma$ è eguale alla BH. Ma cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro (C 1), e perciò la $A\Delta$ è eguale alla $B\Gamma$.

Dunque al punto dato A si è apposta la $A\Delta$, eguale alla retta data $B\Gamma$, come dovevasi fare.

3. — *Date due rette diseguali, dalla maggiore tagliare una retta eguale alla minore.*

Siano AB, Γ le due rette date diseguali delle quali AB sia la maggiore.

Si deve allora dalla maggiore AB tagliare una retta eguale alla Γ.

Si apponga al punto A, la $A\Delta$ eguale alla retta Γ (2), e con centro A e distanza $A\Delta$ si descriva il circolo ΔEZ (P 3).

E poiché il punto A è centro del circolo ΔEZ è AE eguale alla $A\Delta$ (T 15); ma anche la Γ è eguale alla $A\Delta$. Dunque ognuna delle AE, Γ è eguale alla $A\Delta$. Dunque (C 1) anche la Γ è eguale alla AE.

Dunque, *date due rette diseguali dalla maggiore si è tagliata una retta eguale alla minore*, come dovevasi fare.

---

risolvono immediatamente), e di limitarsi alle operazioni ammesse dai primi tre *postulati*.

δ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δυσὶ πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ καὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴσην. λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοι-

---

4. Si noti che nell'enunciato è detto « *angolo... compreso dalle rette eguali* », e non « *compreso dai lati eguali* », per conservare la frase adoperata per definire un angolo (**T 9**).

È stato obiettato a questa proposizione che essa implica postulati non formulati, e che è quindi più semplice assumerla tutta intera come un postulato (per es. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie*, p. 9), ma l'osservazione è antica (IACOBI PELETARII, *In Euclidis Elementa geometrica demonstrationum libri sex*, Lugduni 1557, p. 15: « .... dicamus, hoc Theorema per se clarum esse, neque probatione egere, sed Definitionis cuiusdam loco habendum esse »).

Si osservi però che per mezzo di questa proposizione Euclide, ricorrendo più volte alla nozione comune (**C 4**), dimostra che la *sovrapposizione* di due triangoli eguali si può fare sovrapponendo soltanto un lato ed un angolo di

4. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed un angolo eguale ad un angolo, quello cioè compreso dalle rette eguali, avranno anche la base eguale alla base, e il triangolo sarà eguale al triangolo, ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli a cui sottendono lati eguali.*

Siano i due triangoli, aventi due lati AB, $A\Gamma$ eguali ai due lati ΔE, ΔZ ciascuno a ciascuno, e l'angolo $BA\Gamma$ eguale all'angolo $E\Delta Z$.

Dico che anche la base $B\Gamma$ è eguale alla base EZ, e che il triangolo $AB\Gamma$ sarà eguale al triangolo ΔEZ, e che i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli ciascuno a ciascuno, quelli a cui sotten-

---

esso. La dimostrazione di Euclide, accenna assai in scorcio, ad una possibile teoria della *sovrapposizione*.

Questo metodo di dimostrare l'eguaglianza di due figure per sovrapposizione, sembra piú antico di Euclide. Infatti Proclo riferisce (HEATH p. 253) che TALETE collo stesso metodo avrebbe dimostrato che ogni diametro taglia il circolo in due parti eguali.

Si noti ancora che la (4) ha una immediata applicazione in agrimensura e in topografia. Se si ha una linea poligonale piana, e di essa si conoscono tutti i lati, e gli angoli che ogni lato fa con quello che lo segue, la linea poligonale è determinata, cioè *due linee poligonali aventi i lati e gli angoli anzidetti ordinatamente eguali, sono eguali*.

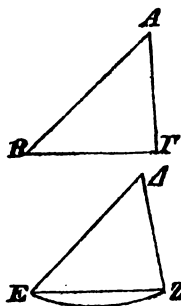
La dimostrazione si conduce come quella della (4).

Se si congiunge ogni vertice della poligonale, con quello che lo precede di due posti, si ha una *catena rigida di triangoli*.

παῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

'Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Α σημείου ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον τῆς δὲ ΑΒ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΔΕ, ἐφαρμόσει καὶ τὸ Β σημεῖον ἐπὶ τὸ Ε διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΑΒ τῇ ΔΕ· ἐφαρμοσάσης δὴ τῆς ΑΒ ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐφαρμόσει καὶ ἡ ΑΓ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν ΔΖ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ὥστε καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ σημεῖον ἐφαρμόσει διὰ τὸ ἴσην πάλιν εἶναι τὴν ΑΓ τῇ ΔΖ. ἀλλὰ μὴν καὶ τὸ Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσει· ὥστε βάσις ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει. εἰ γὰρ τοῦ μὲν Β ἐπὶ τὸ Ε ἐφαρμόσαντος τοῦ δὲ Γ ἐπὶ τὸ Ζ ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ οὐκ ἐφαρμόσει, δύο εὐθεῖαι χωρίον περιέξουσιν. ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. ἐφαρμόσει ἄρα ἡ ΒΓ βάσις ἐπὶ τὴν ΕΖ καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται. ὥστε καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ἐπὶ ὅλον τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἐφαρμόσει καὶ ἴσον αὐτῷ ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ἐπὶ τὰς λοιπὰς γωνίας ἐφαρμόσουσι καὶ ἴσαι αὐταῖς ἔσονται, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἡ δὲ ὑπὸ ΑΓΒ τῇ ὑπὸ ΔΖΕ.

'Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἕξει, καὶ τὸ τρίγωνον τῷ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

dono lati eguali, $AB\Gamma$ eguale a ΔEZ, e $A\Gamma B$ [eguale] a ΔZE. Infatti sovrapposto il triangolo $AB\Gamma$ al triangolo ΔEZ e posto il punto A sul punto Δ e il lato AB sul lato ΔE, anche il punto B si sovrapporrà al punto E, per essere AB eguale alla ΔE (C 4 nota). E sovrapposta la AB alla ΔE, anche la $A\Gamma$ si sovrapporrà alla ΔZ per esser l'angolo $BA\Gamma$ eguale a $E\Delta Z$. Perciò anche il punto Γ si sovrapporrà al punto Z per esser di nuovo eguale $A\Gamma$ alla ΔZ (C 4 nota). Ma anche B è sovrapposto ad E. Perciò anche la base $B\Gamma$ si sovrapporrà alla base EZ. Poiché se B è posto su E e Γ su Z, se la base $B\Gamma$ non è sovrapposta alla base EZ, due rette comprenderebbero uno spazio, ciò che è impossibile.

Sarà quindi anche la base $B\Gamma$ sovrapposta alla base EZ, e sarà ad essa eguale. Dunque anche tutto il triangolo $AB\Gamma$ sarà savrapposto al triangolo ΔEZ e sarà ad esso eguale (C 4), ed i restanti angoli saranno sovrapposti ai restanti angoli, e ad essi saranno eguali (C 4), cioè $AB\Gamma$ eguale a ΔEZ, ed $A\Gamma B$ eguale a ΔZE.

Dunque, *se due triangoli*, etc., come dovevasi dimostrare.

ε'.

Τῶν ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

Ἔστω τρίγωνον ἰσοσκελὲς τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ΑΒ πλευρὰν τῇ ΑΓ πλευρᾷ, καὶ προσεκβεβλήσθωσαν ἐπ' εὐθείας ταῖς ΑΒ, ΑΓ εὐθεῖαι αἱ ΒΔ, ΓΕ· λέγω ὅτι ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἴση ἐστίν, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΕ.

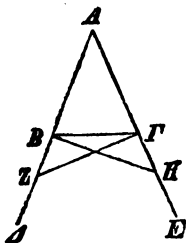
Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τῆς ΒΔ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΕ τῇ ἐλάσσονι τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΑΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΓ, ΗΒ εὐθεῖαι.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΖ τῇ ΑΗ ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΖΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΗΑ, ΑΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίαν κοινὴν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΖΑΗ· βάσις ἄρα ἡ ΖΓ βάσει τῇ ΗΒ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΖΓ τρίγωνον τῷ ΑΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι

---

5. Si noti che il ragionamento ha una lieve imperfezione. Infatti a principio della dimostrazione si dice « *si tolga dalla maggiore AE, la AH eguale alla AZ...* ». Come si può esser certi che sia *AE* maggiore di *AZ?* Evidentemente, o *prolungando* quanto occorre la *AE*, ovvero, il che è lo stesso *prendendo Z,* quanto occorre, vicino a *B*.

5. — *Gli angoli alla base dei triangoli isosceli sono eguali tra loro, e, prolungati i lati eguali, gli angoli sotto la base, saranno eguali tra loro.*

Sia il triangolo isoscele $AB\Gamma$ avente il lato AB eguale al lato $A\Gamma$, e si prolunghino per diritto (P 2) ad AB, $A\Gamma$, le rette $B\Delta$, ΓE.

Dico che l'angolo $AB\Gamma$ è eguale all'angolo $A\Gamma B$, e che anche $\Gamma B\Delta$ è eguale a $B\Gamma E$.

Si prenda infatti sulla $B\Delta$ un punto a caso Z, e si tolga dalla maggiore AE la AH eguale alla AZ (**3**), e si conducano le rette $Z\Gamma$, HB (P **1**).

Poiché dunque AZ è eguale ad AH, ed AB è eguale ad $A\Gamma$, anche le due ZA, $A\Gamma$ sono eguali alle due HA, AB ciascuna a ciascuna, e comprendono l'angolo comune ZAH; perciò la base $Z\Gamma$ è eguale alla base $B\Gamma$ ed il triangolo $AZ\Gamma$ al triangolo AHB, ed i restanti angoli sono eguali ai restanti angoli, ciascuno a ciascuno, quelli cioè a

---

Un'altra dimostrazione della prima parte di questa proposizione è stata data da Proclo, il quale suppone che non si prolunghino i lati e si prenda Δ sul lato AB, e questa dimostraz. non è soggetta alla osservazione precedente.

Pappo, secondo quanto Proclo riferisce, dimostrava questa prima parte senza nessuna costruzione, considerando il triangolo $AB\Gamma$, come *due* triangoli sovrapposti etc.

ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν, ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ τῇ ὑπὸ ΑΒΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΑΗΒ. καὶ ἐπεὶ ὅλη ἡ ΑΖ ὅλῃ τῇ ΑΗ ἐστὶν ἴση, ὧν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ΒΖ λοιπῇ τῇ ΓΗ ἐστὶν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ΖΓ τῇ ΗΒ ἴση· δύο δὴ αἱ ΒΖ, ΖΓ δυσὶ ταῖς ΓΗ, ΗΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΖΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΗΒ ἴση, καὶ βάσις αὐτῶν κοινὴ ἡ ΒΓ· καὶ τὸ ΒΖΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΓΗΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἡ δὲ ὑπὸ ΒΓΖ τῇ ὑπὸ ΓΒΗ. ἐπεὶ οὖν ὅλη ἡ ὑπὸ ΑΒΗ γωνία ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΖ γωνίᾳ ἐδείχθη ἴση, ὧν ἡ ὑπὸ ΓΒΗ τῇ ὑπὸ ΒΓΖ ἴση, λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσὶ πρὸς τῇ βάσει τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΖΒΓ τῇ ὑπὸ ΗΓΒ ἴση· αἵ εἰσιν ὑπὸ τὴν βάσιν.

Τῶν ἄρα ἰσοσκελῶν τριγώνων αἱ πρὸς τῇ βάσει γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ προσεκβληθεισῶν τῶν ἴσων εὐθειῶν αἱ ὑπὸ τὴν βάσιν γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ϛ'.

Ἐὰν τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται.

---

6. In questa proposizione Euclide adopera per la prima volta il metodo di dimostrazione chiamato da ARISTOTELE

cui sottendono eguali lati (4), cioè $A\Gamma Z$ è eguale ABH, ed $AZ\Gamma$ è eguale ad AHB. E poiché tutta la AZ è eguale alla AH, ed AB è eguale ad $A\Gamma$, la restante BZ è eguale alla restante ΓH (C 3). Ma si è dimostrato che anche $Z\Gamma$ è eguale a HB.

Perciò le due BZ, $Z\Gamma$ sono eguali alle due ΓH, HB ciascuna a ciascuna, e l'angolo $BZ\Gamma$ è eguale all'angolo ΓHB, e la loro base $B\Gamma$ è comune. Perciò il triangolo $BZ\Gamma$ sarà eguale al triangolo ΓHB, ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli ciascuno a ciascuno, quelli cioè a cui sottendono lati eguali (4). Quindi l'angolo $ZB\Gamma$ è eguale a $H\Gamma B$, e $B\Gamma Z$ è eguale a ΓBH. Ma poiché tutto l'angolo ABH è stato dimostrato eguale all'angolo $A\Gamma B$, e di essi la parte ΓBH eguale ad $B\Gamma Z$, pure il resto $AB\Gamma$ è eguale al resto $A\Gamma B$ (C 3); e sono alla base del triangolo $AB\Gamma$. E già si era dimostrato che $ZB\Gamma$ è eguale a $H\Gamma B$, i quali sono sotto la base.

Dunque, *gli angoli alla base*, etc. come dovevasi dimostrare.

6. — *Se in un triangolo due angoli sono eguali tra loro, anche i lati sottendenti gli angoli eguali saranno eguali tra loro.*

---

riduzione all'assurdo (ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἀπαγωγή, *Anal. prior.* I, 7, 29 b 5) ovvero *dimostrazione per assurdo* (ἡ διὰ τοῦ ἀδυνάτου ἀπόδειξις, ibid. I, 29, 45 a 35), od ancora *dimostrazione conducente all'assurdo* (ἡ εἰς τὸ ἀδύνατον ἄγουσα ἀπόδειξις, *Anal. post.* I, 24, 85 a 16).

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ἴσην ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῇ ὑπὸ ΑΓΒ γωνίᾳ· λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ πλευρᾷ τῇ ΑΓ ἐστὶν ἴση.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ, ἡ ἑτέρα αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς μείζονος τῆς ΑΒ τῇ ἐλάττονι τῇ ΑΓ ἴση ἡ ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΒ τῇ ΑΓ κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΑΒ ἴση ἐστίν. καὶ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΒ τριγώνῳ ἴσον ἔσται, τὸ ἔλασσον τῷ μείζονι· ὅπερ ἄτοπον· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΑΓ· ἴση ἄρα.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις ὦσιν, καὶ αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας ὑποτείνουσαι πλευραὶ ἴσαι ἀλλήλαις ἔσονται· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ζ'.

Ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ οὐ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις.

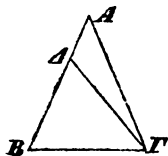
Εἰ γὰρ δυνατόν, ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας τῆς ΑΒ δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ταῖς ΑΓ, ΓΒ ἄλλαι δύο

---

7. L'enunciato della (7) tradotto letteralmente è oscuro. I diversi traduttori lo hanno alterato in varî modi. La ver-

Sia il triangolo $AB\Gamma$ avente l'angolo $AB\Gamma$ eguale all'angolo $A\Gamma B$.

Dico che anche il lato AB è eguale al lato $A\Gamma$.

Se infatti la AB non è eguale alla $A\Gamma$, una di esse è maggiore. Sia maggiore la AB, e si tolga dalla maggiore AB la ΔB eguale alla minore (3), e si congiunga la $\Delta\Gamma$. Poiché dunque la ΔB è eguale alla $A\Gamma$ e la $B\Gamma$ è comune, le due ΔB, $B\Gamma$ sono eguali alle due $A\Gamma$, ΓB ciascuna a ciascuna, e l'angolo $\Delta B\Gamma$ è eguale all'angolo $A\Gamma B$, dunque la base $\Delta\Gamma$ è eguale alla base AB, ed il triangolo $\Delta B\Gamma$ sarà eguale al triangolo $AB\Gamma$ (4), il minore al maggiore, il che è impossibile.

Dunque non è AB diseguale ad $A\Gamma$, dunque è eguale.

Dunque, *se in un triangolo*, etc. c. d. d.

7. — ***Sulla stessa retta, a due stesse rette, non si possono condurre altre due rette, eguali ciascuna a ciascuna, a due punti diversi e dalla stessa parte, aventi gli stessi estremi delle due prime rette.***

Poichè se è possibile, sulla stessa retta AB, alle due stesse rette $A\Gamma$, ΓB si conducano altre

---

sione *libera* più semplice, e più vicina al testo greco, ma chiara, sembra la seguente: « *A due punti diversi e dalla stessa parte di una stessa retta, non si possono condurre due rette eguali tra loro, da ognuno dei due estremi della retta* ».

εὐθεῖαι αἱ ΑΔ, ΔΒ ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συνεστάτωσαν πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ τῷ τε Γ καὶ Δ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΑ τῇ ΔΑ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Α, τὴν δὲ ΓΒ τῇ ΔΒ τὸ αὐτὸ πέρας ἔχουσαν αὐτῇ τὸ Β, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΔ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΔΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΔΓΒ. πάλιν ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΓΔΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΓΒ. ἐδείχθη δὲ αὐτῆς καὶ πολλῷ μείζων· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον.

Οὐκ ἄρα ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ συσταθήσονται πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι ταῖς ἐξ ἀρχῆς εὐθείαις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

η'.

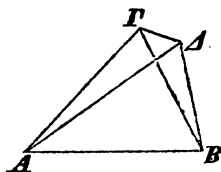
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, ἔχῃ δὲ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευ-

---

8. HEATH ha osservato che il testo greco così oscuro, faceva parte probabilmente della fraseologia tradizionale, e perciò

due rette $A\Delta$, ΔB eguali ciascuna a ciascuna, a due punti diversi Γ, Δ e dalla stessa parte, aventi gli stessi estremi, cosicché ΓA sia eguale a ΔA, aventi lo stesso estremo A, e ΓB sia eguale a ΔB, aventi lo stesso estremo B.

Si conduca la $\Gamma\Delta$.

Poiché dunque $A\Gamma$ è eguale ad $A\Delta$, l'angolo $A\Gamma\Delta$ è eguale a $A\Delta\Gamma$ (5). Dunque $A\Delta\Gamma$ è maggiore di $\Delta\Gamma B$. E quindi $\Gamma\Delta B$ è molto maggiore di $\Delta\Gamma B$ (C 5). Ma ancora, poiché ΓB è eguale a ΔB, l'angolo $\Gamma\Delta B$ è eguale a $\Delta\Gamma B$ (5). Ma si è dimostrato che è molto maggiore, il che è impossibile.

Dunque *sulla stessa retta* etc. c. d. d.

8. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed hanno la base eguale alla base, avranno anche eguali gli angoli compresi da rette eguali.*

Siano i due triangoli $AB\Gamma$, ΔEZ aventi i due

---

sebbene vago, era facilmente capito dai geometri greci. Si trovano infatti enunciati spesso nello stesso modo ellittico ed oscuro, molti teoremi di geometria nelle opere di Aristotele.

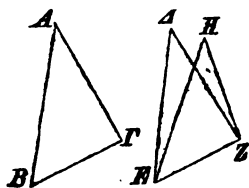
Euclide dà soltanto il caso più difficile, in cui si supponga il punto Δ esterno al triangolo $AB\Gamma$. Se Δ si suppone interno al triangolo, con qualche lieve semplificazione si può ripetere la stessa dimostrazione.

ρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· ἐχέτω δὲ καὶ βάσιν τὴν ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ ἴσην· λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἐστὶν ἴση.

᾿Εφαρμοζομένου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπὶ τὸ ΔΕΖ τρίγωνον καὶ τιθεμένου τοῦ μὲν Β σημείου ἐπὶ τὸ Ε σημεῖον τῆς δὲ ΒΓ εὐθείας ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει καὶ τὸ Γ σημεῖον ἐπὶ τὸ Ζ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ. ἐφαρμοσάσης δὲ τῆς ΒΓ ἐπὶ τὴν ΕΖ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΓΑ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. εἰ γὰρ βάσις μὲν ἡ ΒΓ ἐπὶ βάσιν τὴν ΕΖ ἐφαρμόσει, αἱ δὲ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ οὐκ ἐφαρμόσουσιν ἀλλὰ παραλλάξουσιν ὡς αἱ ΕΗ, ΗΖ, συσταθήσονται ἐπὶ τῆς αὐτῆς εὐθείας δύο ταῖς αὐταῖς εὐθείαις ἄλλαι δύο εὐθεῖαι ἴσαι ἑκατέρα ἑκατέρᾳ πρὸς ἄλλῳ καὶ ἄλλῳ σημείῳ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰ αὐτὰ πέρατα ἔχουσαι. οὐ συνίστανται δέ· οὐκ ἄρα ἐφαρμοζομένης τῆς ΒΓ βάσεως ἐπὶ τὴν ΕΖ βάσιν οὐκ ἐφαρμόσουσι καὶ αἱ ΒΑ, ΑΓ πλευραὶ ἐπὶ τὰς ΕΔ, ΔΖ. ἐφαρμόσουσιν ἄρα· ὥστε καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ ἐπὶ γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΔΖ ἐφαρμόσει καὶ ἴση αὐτῇ ἔσται.

᾿Εὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν βάσιν τῇ βάσει ἴσην ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῇ γωνίᾳ ἴσην ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

lati AB, $A\Gamma$ eguali ai due lati ΔE, ΔZ ciascuno a ciascuno, AB eguale a ΔE, ed $A\Gamma$ a ΔZ. Ed abbiano anche la base $B\Gamma$ eguale alla base EZ. Dico che anche l'angolo $BA\Gamma$ è eguale all'angolo $E\Delta Z$.

Infatti sovrapposto il triangolo $AB\Gamma$ sul triangolo ΔEZ e posto il punto B sul punto E e la retta $B\Gamma$ sulla retta EZ, anche il punto Γ si sovrapporrà al punto Z per essere $B\Gamma$ eguale ad EZ.

Ma sovrapposta la $B\Gamma$ sulla EZ, si sovrapporranno anche le BA, $A\Gamma$ sulle $E\Delta$, ΔZ. Poiché se la base $B\Gamma$ è sovrapposta alla EZ ed i lati BA, $A\Gamma$ non si sovrappongono sui lati $E\Delta$, $\Delta\Gamma$ ma cadono fuori come in EH, HZ si saranno costruite sulla stessa retta, alle stesse due rette, altre due rette eguali, ciascuna a ciascuna, da due punti diversi e dalla stessa parte, aventi gli stessi estremi delle due prime rette.

Ma non si possono costruire (7); dunque non [è vero che] sovrapposta la base $B\Gamma$ sulla base EZ, non si sovrapporranno i lati BA, $A\Gamma$ ai lati $E\Delta$, ΔZ. Dunque si sovrapporranno. Dunque anche l'angolo $BA\Gamma$ si sovrapporà all'angolo $E\Delta Z$ e sarà ad esso eguale.

Dunque *se due triangoli,* etc. c. d. d.

θ'.

Τὴν δοθεῖσαν γωνίαν εὐθύγραμμον δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. δεῖ δὴ αὐτὴν δίχα τεμεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπὸ τῆς ΑΓ τῇ ΑΔ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ, καὶ συνεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΔΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ· λέγω ὅτι ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΑΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΖ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΖ δυσὶ ταῖς ΕΑ, ΑΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ. καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΕΖ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΖ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΒΑΓ δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΑΖ εὐθείας· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

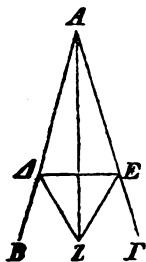
---

9. Già ai geometri greci era venuto il desiderio di trovare una costruzione per dividere un angolo in tre o in un maggior numero di parti eguali. Non essendovi riusciti, adoperando soltanto rette e circoli, adoprarono altre curve. Nicomede trisecò l'angolo per mezzo della *concoide*, ed Archimede per mezzo dell'intersezione di un circolo e di una retta che ruota nel piano, nel suo *Lemma* VIII. Ippia per mezzo della sua *quadratrice*, ed Archimede colla sua *spirale*, in-

9. — *Dividere per metà un dato angolo rettilineo.*

Sia $BA\Gamma$ il dato angolo rettilineo; occorre dividerlo per metà.

Si prenda sulla AB a caso il punto Δ, e si tolga dalla $A\Gamma$, la AE eguale alla $A\Delta$ (3), si conduca la ΔE e sulla ΔE si costruisca il triangolo equilatero ΔEZ (1), e si conduca la AZ.

Dico che l' angolo $BA\Gamma$ è diviso per metà dalla AZ.

Poiché infatti $A\Delta$ è eguale alla AE, ed AZ è comune, le due ΔA, AZ sono eguali alle due EA, AZ ciascuna a ciascuna. E la base ΔZ è eguale alla base EZ. Perciò l'angolo ΔAZ è eguale all' angolo EAZ (8).

Dunque il dato angolo rettilineo $BA\Gamma$ è diviso per metà dalla retta AZ, come dovevasi fare.

---

segnarono a dividere un angolo in qualsivoglia numero di parti eguali. Soltanto i matematici del secolo XIX riuscirono a dimostrare che adoperando un numero finito di intersezioni di rette e di circoli, non si può trisecare un angolo qualunque.

ι΄.

Τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ τὴν ΑΒ εὐθεῖαν πεπερασμένην δίχα τεμεῖν.

Συνεστάτω ἐπ' αὐτῆς τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΑΒΓ, καὶ τετμήσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία δίχα τῇ ΓΔ εὐθείᾳ. λέγω ὅτι ἡ ΑΒ εὐθεῖα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ σημεῖον.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΔ, δύο δὴ αἱ ΑΓ, ΓΔ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΒΔ ἴση ἐστίν.

Ἡ ἄρα δοθεῖσα εὐθεῖα πεπερασμένη ἡ ΑΒ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ια΄.

Τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Γ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

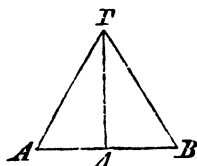
---

10. Il problema analogo a quello della *trisezione* di un angolo, è la trisezione di una retta. Essa non può farsi

10. — *Dividere per metà una data retta terminata.*

Sia AB la retta data terminata; occorre dunque dividerla per metà.

Si costruisca su di essa il triangolo equilatero $A\Gamma B$ (**1**), e si divida per metà l'angolo $A\Gamma B$ colla retta $\Gamma\Delta$ (**9**).

Dico che la AB è divisa per metà nel punto Δ.

Infatti la $A\Gamma$ è eguale alla ΓB, la $\Gamma\Delta$ è comune, e le due $A\Gamma$, $\Gamma\Delta$ sono eguali alle due $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$ ciascuna a ciascuna; e l'angolo $A\Gamma\Delta$ è eguale all'angolo $B\Gamma\Delta$. Perciò la base $A\Delta$ è eguale alla base $B\Delta$ (**4**).

Dunque la data retta terminata AB è divisa in Δ, c. d. f.

11. — *Ad una retta data, da un punto dato su di essa condurre una linea retta ad angolo retto.*

Sia AB la retta data, e sia Γ il punto dato su di essa. Si deve dunque dal punto Γ condurre alla retta AB una retta ad angolo retto.

---

senza ricorrere al postulato delle parallele (P**5**). La dimostrazione di questa impossibilità però non è semplice, cfr. nota alla (**34**).

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κείσθω τῇ ΓΔ ἴση ἡ ΓΕ, καὶ συννεστάτω ἐπὶ τῆς ΔΕ τρίγωνον ἰσόπλευρον τὸ ΖΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ. λέγω ὅτι τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΖΓ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΓ τῇ ΓΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΓΖ, δύο δὴ αἱ ΔΓ, ΓΖ δυσὶ ταῖς ΕΓ, ΓΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΔΖ βάσει τῇ ΖΕ ἴση ἐστίν· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΖ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ ἴση ἐστίν, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν· ὀρθὴ ἄρα ἐστὶν ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΔΓΖ, ΖΓΕ.

Τῇ ἄρα δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ δοθέντος σημείου τοῦ Γ πρὸς ὀρθὰς γωνίας εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΓΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

ιβ'.

Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

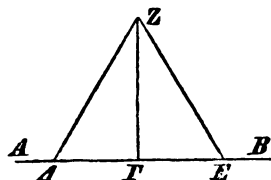
Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἄπειρος ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, τὸ Γ. δεῖ δὴ ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ

---

11. A. De Morgan ha osservato che se, come oggi talvolta si fa, si includono gli angoli *piatti* tra gli angoli formati da due rette, (T **10**) la (**11**) diventa un caso particolare della (**9**), la costruzione essendo la stessa.

Si prenda su AB un punto a caso Δ, e si prenda ΓE eguale a $\Gamma\Delta$ (2), e su ΔE si costruisca un triangolo equilatero (1), e si conduca la $Z\Gamma$.

Dico che alla retta data AB, dal punto Γ dato su di essa, è stata condotta, ad angolo retto, la retta $Z\Gamma$.

Poiché infatti $\Delta\Gamma$ è eguale a ΓE e ΓZ è comune, le due rette $\Delta\Gamma$, ΓZ sono eguali alle due $E\Gamma$, ΓZ ciascuna a ciascuna. E la base ΔZ è eguale alla base ZE. Perciò l'angolo $\Delta\Gamma Z$ è eguale all' angolo $E\Gamma Z$, e sono adiacenti (8). Ma quando una retta posta sopra una retta fa gli angoli adiacenti eguali tra loro, ognuno dei due angoli eguali è retto (T 10).

Perciò $\Delta\Gamma Z$, $Z\Gamma E$ sono retti.

Perciò alla retta data AB dal punto dato su di essa Γ, si è condotta la retta ΓZ ad angolo retto, c. d. f.

12. — *Ad una data retta infinita, da un punto dato che non è su di essa, condurre una linea retta perpendicolare.*

Sia AB la retta infinita data e sia Γ il punto che non è su di essa.

---

12. EUCLIDE suppone tacitamente che il circolo EZH tagli la retta AB in due, ed in due soli punti. A questa

δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω γὰρ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη τῆς ΑΒ εὐθείας τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Γ διαστήματι δὲ τῷ ΓΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΕΖΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΕΗ εὐθεῖα δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΗ, ΓΘ, ΓΕ εὐθεῖαι· λέγω ὅτι ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΘΕ, κοινὴ δὲ ἡ ΘΓ, δύο δὴ αἱ ΗΘ, ΘΓ δύο ταῖς ΕΘ, ΘΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ βάσις ἡ ΓΗ βάσει τῇ ΓΕ ἐστὶν ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΘΗ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΘΓ ἐστὶν ἴση, καί εἰσιν ἐφεξῆς. ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστιν, καὶ ἡ ἐφεστηκυῖα εὐθεῖα κάθετος καλεῖται ἐφ' ἣν ἐφέστηκεν.

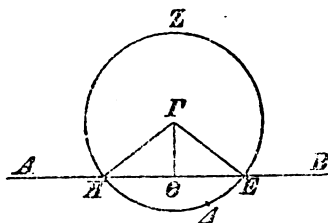
Ἐπὶ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν ἄπειρον τὴν ΑΒ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου τοῦ Γ, ὃ μή ἐστιν ἐπ' αὐτῆς, κάθετος ἦκται ἡ ΓΘ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

---

supposizione si può anche dare la forma seguente: *Ogni retta condotta per un punto interno ad un circolo, lo taglia in due punti.* Infatti, poiché si è preso *Δ* dall'altra parte di *AB*, la retta *ΓΔ* taglia *AB* in un punto interno al circolo, ed *AB* è condotta per questo punto.

Tale supposizione, sebbene sia facilmente ammessa da chi comincia a studiare geometria, si può dedurre dalle proposizioni precedenti (come ha dimostrato Heath, p. 273–274).

Si deve dunque condurre alla retta data infinita AB, dal punto dato Γ che non è su di essa, una linea retta perpendicolare.

Si prenda dall'altra parte della retta AB, a caso, un punto Δ e con centro Γ e distanza $\Gamma\Delta$ si descriva il circolo EZH (**P 3**). E si divida la retta EH per metà in Θ (**10**), e si congiungano le ΓH, $\Gamma\Theta$, ΓE.

Dico che alla retta data infinita AB, dal punto Γ che non è su di essa, è stata condotta la perpendicolare $\Gamma\Theta$.

Poiché infatti la $H\Theta$ è eguale alla ΘE, e $\Theta\Gamma$ è comune, le due $H\Theta$, $\Theta\Gamma$ sono eguali alle due $E\Theta$, $\Theta\Gamma$, ciascuna a ciascuna. E la base ΓH è eguale alla base ΓE. Dunque l'angolo $\Gamma\Theta H$ è eguale all'angolo $E\Theta\Gamma$ (**8**), e sono adiacenti. Ma quando una retta posta sopra una retta, fa gli angoli adiacenti eguali tra loro, ognuno dei due angoli eguali è retto, e la retta posta si chiama perpendicolare a quella su cui è stata posta (**T 10**).

Dunque alla data retta infinita AB, dal punto dato Γ che non è su di essa, si è condotta la perpendicolare $\Gamma\Theta$, c. d. f.

Già PROCLO aveva tentato dimostrare che il circolo non incontra la retta in *più di due* punti.

ιγ'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει.

Εὐθεῖα γάρ τις ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ σταθεῖσα γωνίας ποιείτω τὰς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ. λέγω ὅτι αἱ ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ γωνίαι ἤτοι δύο ὀρθαί εἰσιν ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι.

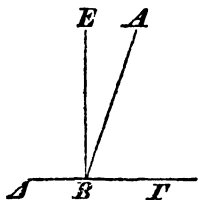
Εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΒΑ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, δύο ὀρθαί εἰσιν. εἰ δὲ οὔ, ἤχθω ἀπὸ τοῦ Β σημείου τῇ ΓΔ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΒΕ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΒΕ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΕΒΔ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ, ΕΒΔ ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΔΒΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ ἴση ἐστίν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΔΒΕ, ΕΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ τρισὶ ταῖς αὐταῖς ἴσαι· τὰ δὲ τῷ αὐτῷ ἴσα καὶ ἀλλήλοις ἐστὶν ἴσα· καὶ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ ἄρα ταῖς ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἴσαι εἰσίν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΓΒΕ, ΕΒΔ δύο ὀρθαί εἰσιν· καὶ αἱ ὑπὸ ΔΒΑ, ΑΒΓ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα γωνίας ποιῇ, ἤτοι δύο ὀρθὰς ἢ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιήσει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

13. — *Se una retta, posta sopra una retta fa degli angoli, farà due angoli retti, o eguali a due retti.*

Infatti una retta AB posta sulla $\Gamma\Delta$ faccia gli angoli ΓBA, $AB\Delta$.

Dico che gli angoli ΓBA, $AB\Delta$ o son due retti, o sono eguali a due retti.

Poiché se ΓBA è eguale a $AB\Delta$, essi sono due retti (T **10**). Ma se no, dal punto B si conduca la BE, ad angolo retto alla $\Gamma\Delta$ (**11**); dunque ΓBE, $EB\Delta$ son due retti. E poiché ΓBE è eguale ai due ΓBA, ABE, si aggiunga $EB\Delta$ comune. Dunque ΓBE, $EB\Delta$ sono eguali ai tre ΓBA, ABE, $EB\Delta$ (C **2**).

Ed ancora, poiché ΔBA è eguale ai due ΔBE, EBA, si aggiunga $AB\Gamma$, comune. Dunque ΔBA, $AB\Gamma$ sono eguali ai tre ΔBE, EBA, $AB\Gamma$ (C **2**). Ma si è dimostrato che anche ΓBE, $EB\Delta$ sono eguali agli stessi tre. Ma le cose eguali ad una stessa sono eguali tra loro; dunque ΓBE, $EB\Delta$ sono eguali a ΔBA, $AB\Gamma$.

Ma ΓBE, $EB\Delta$ son due retti, dunque ΔBA, $AB\Gamma$ sono eguali a due retti.

Dunque, *se una retta posta*, etc. c. d. d.

ιδ'.

Ἐὰν πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Πρὸς γάρ τινι εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Β δύο εὐθεῖαι αἱ ΒΓ, ΒΔ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιείτωσαν. λέγω ὅτι ἐπ' εὐθείας ἐστὶ τῇ ΓΒ ἡ ΒΔ.

Εἰ γὰρ μή ἐστι τῇ ΒΓ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΔ, ἔστω τῇ ΓΒ ἐπ' εὐθείας ἡ ΒΕ.

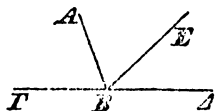
Ἐπεὶ οὖν εὐθεῖα ἡ ΑΒ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΒΕ ἐφέστηκεν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΑΒΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΕ ταῖς ὑπὸ ΓΒΑ, ΑΒΔ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΓΒΑ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΕ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ ἐστὶν ἴση, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα ἐπ' εὐθείας ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΓΒ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς ΒΔ· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ.

Ἐὰν ἄρα πρός τινι εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ δύο εὐθεῖαι μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιῶσιν, ἐπ' εὐθείας ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

14. — *Se con una retta, e in un punto su di essa, due rette non poste dalla stessa parte, fanno gli angoli adiacenti eguali a due retti, le due rette saranno per diritto tra loro.*

Con una retta AB, e nel punto B su di essa, le due rette $B\Gamma$, $B\Delta$ che non son poste dalla stessa parte, facciano gli angoli adiacenti $AB\Gamma$, $AB\Delta$ eguali a due retti.

Dico che $B\Delta$ è per diritto alla ΓB.

Se infatti $B\Delta$ non è per diritto alla ΓB, sia BE per diritto alla ΓB.

Poiché dunque la retta AB è posta sulla ΓBE, gli angoli $AB\Gamma$, ABE sono eguali a due retti (**13**). Ma anche $AB\Gamma$, $AB\Delta$ sono eguali a due retti. Dunque $AB\Gamma$, ABE sono eguali a $AB\Gamma$, $AB\Delta$ (C **1**). Si tolga ΓBA, comune. Dunque il resto ABE è eguale al resto $AB\Delta$ (C **3**), il minore al maggiore, ciò che è impossibile.

Dunque BE non è per diritto alla ΓB. Similmente si dimostrerà che nessun' altra retta lo è, oltre la $B\Delta$.

Adunque ΓB è per diritto alla $B\Delta$.

Dunque, *se con una retta*, etc. c. d. d.

ιε'.

Ἐὰν δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν.

Δύο γὰρ εὐθεῖαι αἱ ΑΒ, ΓΔ τεμνέτωσαν ἀλλήλας κατὰ τὸ Ε σημεῖον. λέγω ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΕΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΕΒ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΒ τῇ ὑπὸ ΑΕΔ.

Ἐπεὶ γὰρ εὐθεῖα ἡ ΑΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΓΔ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΔΕ ἐπ' εὐθεῖαν τὴν ΑΒ ἐφέστηκε γωνίας ποιοῦσα τὰς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθησαν δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΕΑ, ΑΕΔ ταῖς ὑπὸ ΑΕΔ, ΔΕΒ ἴσαι εἰσίν. κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΑΕΔ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΓΕΑ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΒΕΔ ἴση ἐστίν· ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΓΕΒ, ΔΕΑ ἴσαι εἰσίν.

Ἐὰν ἄρα δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας, τὰς κατὰ κορυφὴν γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιοῦσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ις'.

Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς

15. — *Se due rette si tagliano tra di loro, fanno gli angoli al vertice eguali tra loro.*

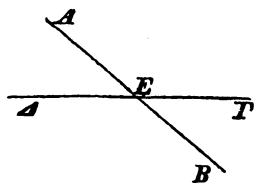
Infatti, le due rette AB, $\Gamma\Delta$ si taglino tra loro nel punto E.

Dico che l'angolo $AE\Gamma$ è eguale all'angolo ΔEB, e che ΓEB è eguale a $AE\Delta$.

Poiché infatti la retta AE è posta sulla $\Delta\Gamma$, facendo gli angoli ΓEA, $AE\Delta$, i due angoli ΓEA, $AE\Delta$ sono eguali a due retti (**13**). Ed ancora, poiché la retta ΔE è posta sulla retta AB facendo gli angoli $AE\Delta$, ΔEB, anche gli angoli $AE\Delta$, ΔEB sono eguali a due retti. Dunque gli angoli ΓEA, $AE\Delta$ sono eguali agli angoli $AE\Delta$, ΔEB (C **1**). Si tolga $AE\Delta$ comune; allora il resto ΓEA è eguale al resto $BE\Delta$. Similmente si dimostrerà che anche ΓEB, ΔEA sono eguali.

Dunque, *se due rette*, etc. c. d. d.

16. — *In ogni triangolo, prolungato un lato, l'angolo esterno è maggiore di ciascuno dei due interni ed opposti.*

Sia il triangolo $AB\Gamma$; e si prolunghi un lato $B\Gamma$ di esso fino in Δ.

γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ μείζων ἐστὶν ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΓΒΑ, ΒΑΓ γωνιῶν.

Τετμήσθω ἡ ΑΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΒΕ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἐπὶ τὸ Ζ, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΓ, καὶ διήχθω ἡ ΑΓ ἐπὶ τὸ Η.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΕ τῇ ΕΓ, ἡ δὲ ΒΕ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΑΕ, ΕΒ δυσὶ ταῖς ΓΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΒ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΕΓ ἴση ἐστίν· κατὰ κορυφὴν γάρ· βάσις ἄρα ἡ ΑΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΖΕΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΕ τῇ ὑπὸ ΕΓΖ. μείζων δέ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΕΓΔ τῆς ὑπὸ ΕΓΖ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ τῆς ὑπὸ ΒΑΕ. Ὁμοίως δὴ τῆς ΒΓ τετμημένης δίχα δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων καὶ τῆς ὑπὸ ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία ἑκατέρας τῶν ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνιῶν μείζων ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

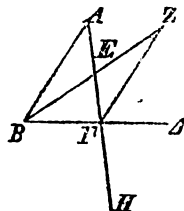
ιζ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

---

17. Si osservi che questa proposizione è inversa del postulato 5, del quale si farà uso soltanto dalla (**29**) in poi. Infatti il (P **5**) afferma che, se due rette, incontrate da un'altra, fanno gli angoli interni dalla stessa parte minori

Dico che l'angolo esterno $A\Gamma\Delta$ è maggiore di ciascuno dei due interni ed opposti ΓBA, $BA\Gamma$.

Si divida per metà la $A\Gamma$ in E (**10**), e condotta la BE, si prolunghi per diritto fino in Z, e si ponga EZ eguale alla BE, e si conduca la $Z\Gamma$, e si prolunghi la $A\Gamma$ fino in H.

Poiché dunque AE è eguale alla $E\Gamma$, e la BE alla EZ, le due AE, EB sono eguali alle due ΓE, EZ, ciascuna a ciascuna. E l'angolo AEB è eguale all'angolo $ZE\Gamma$; sono infatti opposti al vertice (**15**). Dunque la base $Z\Gamma$ è eguale alla base AB, ed il triangolo ABE è eguale al triangolo $ZE\Gamma$ ed i restanti angoli sono eguali ciascuno a ciascuno, quelli sottesi da lati eguali (**4**).

Dunque BAE è eguale a $E\Gamma Z$. Ma $E\Gamma\Delta$ è maggiore di $E\Gamma Z$ (C 5), dunque $A\Gamma\Delta$ è maggiore di BAE.

Similmente, divisa per metà la $B\Gamma$, si dimostrerà che $B\Gamma H$, o ciò che è lo stesso $A\Gamma\Delta$, è maggiore di $AB\Gamma$.

Dunque, *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

17. — *In ogni triangolo due angoli comunque presi, son minori di due retti.*

---

di due retti, esse s' incontrano. Questa (**17**), afferma invece, che se due rette s'incontrano, e sono incontrate da un'altra (formando così un triangolo), fanno con questa gli angoli interni dalla parte da cui s' incontrano (che son due angoli del triangolo), minori di due retti.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάττονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ.

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΑΒΓ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΑΒΓ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τῶν ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ μείζονές εἰσιν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΒ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι καὶ ἔτι αἱ ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιη'.

Παντὸς τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ΑΓ πλευρὰν τῆς ΑΒ. λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΓΑ.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ, κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΔ.

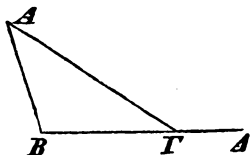
---

18. Da questa proposizione si ricava con una regola di logica pura la proposizione (**6**). Si ha infatti la proposizione: $a, b \,\varepsilon\,$ Cls. ɔ: $a \,ɔ\, b. = {-}b \,ɔ\, {-}a$ (G. PEANO, *Aritmetica generale ed algebra elementare;* Torino, Paravia 1902 p. 7). Ora dalla (**18**) si ricava:

− (triangoli isosceli) ɔ − (triangoli aventi gli angoli alla

Sia il triangolo $AB\Gamma$.

Dico che due angoli del triangolo $AB\Gamma$, comunque presi, sono minori di due retti.

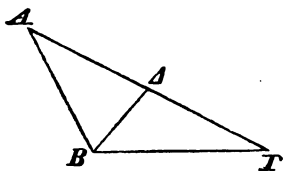
Si prolunghi infatti la $B\Gamma$ in Δ.

E poiché nel triangolo $AB\Gamma$ l'angolo $A\Gamma\Delta$ è esterno, è maggiore dell'interno ed opposto $AB\Gamma$ (**16**).

Si aggiunga $A\Gamma B$, comune. Dunque gli angoli $A\Gamma\Delta$, $A\Gamma B$ son maggiori di $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ (C 4). Ma $A\Gamma A$, $A\Gamma B$ sono eguali a due retti (**13**).

Dunque $AB\Gamma$, $BA\Gamma$ son minori di due retti.

Similmente dimostreremo che anche $BA\Gamma$, $A\Gamma B$ son minori di due retti, e cosí pure ΓAB, $AB\Gamma$.

Adunque in ogni triangolo, etc., c. d. d.

18. — *In ogni triangolo, il maggior lato sottende il maggior angolo.*

Sia infatti il triangolo $AB\Gamma$ avente il lato $A\Gamma$ maggiore di AB.

Dico che anche l'angolo $AB\Gamma$ è maggiore di $B\Gamma A$.

Poiché infatti $A\Gamma$ è maggiore di AB, si ponga $A\Delta$ eguale ad AB (**2**) e si congiunga $B\Delta$.

base eguali). Quindi: (triangoli aventi gli angoli alla base eguali) ɔ (triangoli isosceli), che è la (**6**).

Καὶ ἐπεὶ τριγώνου τοῦ ΒΓΔ ἐκτός ἐστι γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, μείζων ἐστὶ τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῆς ὑπὸ ΔΓΒ· ἴση δὲ ἡ ὑπὸ ΑΔΒ τῇ ὑπὸ ΑΒΔ, ἐπεὶ καὶ πλευρὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· μείζων ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΔ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου ἡ μείζων πλευρὰ τὴν μείζονα γωνίαν ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

ιθ'.

Παντὸς τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΑΒΓ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΓΑ. λέγω ὅτι καὶ πλευρὰ ἡ ΑΓ πλευρᾶς τῆς ΑΒ μείζων ἐστίν.

Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΑΒ. οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ· οὐκ ἔστι δέ·

---

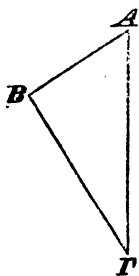
19. Augustus De Morgan (*Formal logic*, 1847, p. 25) secondo un passo riferito da Heath (p. 284), ha osservato che le (**6**) e (**19**) si deducono contemporaneamente dalle (**5**) e (**18**), con pure operazioni di logica. Se infatti si hanno due terne di proposizioni p, q, r ed x, y, z, tali che di ogni terna, una ed una sola sia vera, cioè sia: $p = -q -r$, $q = -r -p$, $r = -p -q$, e cosí pure $x = -y -z$, etc. allora si ha:

$$x \supset p .\ y \supset q .\ z \supset r .\ \supset .\ p \supset x .\ q \supset y .\ r \supset z .$$

Poiché nel triangolo $B\Gamma\Delta$, l'angolo $A\Delta B$ è esterno, esso è maggiore dell'interno ed opposto $\Delta\Gamma B$ (**16**); ed ancora l'angolo $A\Delta B$ è eguale a $AB\Delta$, poiché il lato AB è eguale ad $A\Delta$ (**5**); è dunque anche $AB\Delta$ maggiore di $A\Gamma B$. Dunque $AB\Gamma$ è ancor maggiore di $A\Gamma B$ (C 5).

Dunque, *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

19. — *In ogni triangolo, il maggior angolo è sotteso dal maggior lato.*

Sia $AB\Gamma$ il triangolo avente l' angolo $AB\Gamma$ maggiore dell'angolo $B\Gamma A$.

Dico che anche il lato $A\Gamma$ è maggiore del lato AB.

Se infatti non è, la $A\Gamma$ è eguale o minore della AB. Ma non è AB eguale ad $A\Gamma$, poiché allora sarebbe anche $AB\Gamma$ eguale a $A\Gamma B$ (**5**). E nemmeno è $A\Gamma$ minore di AB, poiché allora sarebbe $AB\Gamma$ minore di $A\Gamma B$ (**18**), il che non è. Dunque non è $A\Gamma$ minore di AB. Ma si è di-

---

Se ora denotiamo con a, b due lati di un triangolo e con A, B gli angoli opposti; le due terne di proposizioni; $a=b$, $a<b$, $a>b$; $A=B$, $A<B$, $A>B$, soddisfanno alle condizioni sopra indicate; ed inoltre:

$a=b . \supset . A=B$ (**5**); $a<b . \supset . A<B$ (**18**);
$a>b . \supset . A>B$ (**18**).

perciò anche:

$A=B . \supset . a=b$ (**6**); $A<B . \supset . a<b$. (**19**);
$A>B . \supset . a>b$ (**19**).

οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση ἐστίν. μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῆς ΑΒ.
Παντὸς ἄρα τριγώνου ὑπὸ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κ'.

Παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι.

Ἔστω γὰρ τρίγωνον τὸ ΑΒΓ· λέγω ὅτι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ, αἱ δὲ ΑΒ, ΒΓ τῆς ΑΓ, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.
Διήχθω γὰρ ἡ ΒΑ ἐπὶ τὸ Δ σημεῖον, καὶ κείσθω τῇ ΓΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΓ.
Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ, ἴση ἐστὶ καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΔΓ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΓΔ τῆς ὑπὸ ΑΔΓ· καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΔΓΒ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΓΔ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΒΔΓ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, ἡ ΔΒ ἄρα τῆς ΒΓ ἐστὶ μείζων. ἴση δὲ ἡ ΔΑ τῇ ΑΓ· μείζονες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῆς ΒΓ· ὁμοίως δὴ δείξο-

---

20. Secondo uno scoliaste greco (EUCLIDE, ed. HEIBERG, vol. V p. 156), gli Epicurei dicevano inutile questo teorema (**20**) osservando che era evidente anche ad un asino, e non aveva bisogno di nessuna dimostrazione.

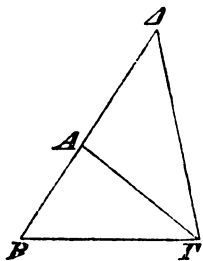
Archimede (*Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου* lib. I.) comincia col postulato « La retta è la minima di tutte le linee contermini ». (*Λαμβάνω δὲ ταῦτα· Τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν*).

mostrato che non è neppure eguale, dunque $A\Gamma$ è maggiore di AB.

Dunque, *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

20. — *In ogni triangolo, due lati sono maggiori del restante, comunque siano presi.*

Sia infatti il triangolo $AB\Gamma$.

Dico che due lati son maggiori del restante comunque siano presi, cioè BA, $A\Gamma$ maggiori di $B\Gamma$; AB, $B\Gamma$ maggiori di $A\Gamma$; $B\Gamma$, ΓA maggiori di AB.

Si prolunghi infatti la BA verso il punto Δ, e si ponga $A\Delta$ eguale a ΓA, e si congiunga la $\Delta\Gamma$.

Poiché dunque ΔA è eguale ad $A\Gamma$, l'angolo $A\Delta\Gamma$ è eguale all'angolo $A\Gamma\Delta$ (5). Dunque $B\Gamma\Delta$ è maggiore di $A\Delta\Gamma$. E poiché il triangolo $\Delta\Gamma B$ ha l'angolo $B\Gamma\Delta$ maggiore dell' angolo $B\Delta\Gamma$, ed al maggior angolo sottende il maggior lato (**19**), la ΔB è dunque maggiore della $B\Gamma$. Ma ΔA è eguale a $A\Gamma$; dunque le BA, $A\Gamma$ son maggiori della $B\Gamma$. Similmente dimo-

La dimostrazione di Euclide, assai elegante, ha lo scopo di enunciare una condizione necessaria perchè tre rette formino un triangolo (**22**). Essa serve inoltre a mostrare che il numero degli assiomi da cui si possono dedurre le verità della geometria è piccolo.

μεν, ὅτι καὶ αἱ μὲν ΑΒ, ΒΓ τῆς ΓΑ μείζονές εἰσιν, αἱ δὲ ΒΓ, ΓΑ τῆς ΑΒ.

Παντὸς ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσι πάντῃ μεταλαμβανόμεναι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κα΄.

Ἐὰν τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μὲν ἔσονται, μείζονα δὲ γωνίαν περιέξουσιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν τῆς ΒΓ ἀπὸ τῶν περάτων τῶν Β, Γ δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συνεστάτωσαν αἱ ΒΔ, ΔΓ. λέγω ὅτι αἱ ΒΔ, ΔΓ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τῶν ΒΑ, ΑΓ ἐλάσσονες μέν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσι τὴν ὑπὸ ΒΔΓ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

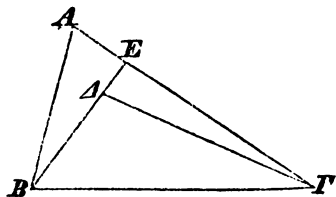
Διήχθω γὰρ ἡ ΒΔ ἐπὶ τὸ Ε. καὶ ἐπεὶ παντὸς τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ τῆς λοιπῆς μείζονές εἰσιν, τοῦ ΑΒΕ ἄρα τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΑΒ, ΑΕ τῆς ΒΕ μείζονές εἰσιν· κοινὴ προσκείσθω ἡ ΕΓ· αἱ ἄρα ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονές εἰσιν. πάλιν, ἐπεὶ τοῦ ΓΕΔ τριγώνου αἱ δύο πλευραὶ αἱ ΓΕ, ΕΔ τῆς ΓΔ μείζονές εἰσιν, κοινὴ προσκείσθω ἡ ΔΒ· αἱ ΓΕ, ΕΒ ἄρα τῶν ΓΔ, ΔΒ μείζονές εἰσιν. ἀλλὰ τῶν ΒΕ, ΕΓ μείζονες ἐδείχθησαν αἱ ΒΑ, ΑΓ· πολλῷ ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΓ τῶν ΒΔ, ΔΓ μείζονές εἰσιν.

Πάλιν, ἐπεὶ παντὸς τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία τῆς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον μείζων ἐστίν, τοῦ ΓΔΕ ἄρα

streremo che AB, $B\Gamma$ son maggiori di $A\Gamma$, e che $B\Gamma$, ΓA son maggiori di AB.

Dunque, *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

21. — ***Se in un triangolo, dagli estremi di un lato si congiungono due rette internamente, le due rette congiunte saranno minori dei due restanti lati del triangolo, e comprenderanno un angolo maggiore.***

Infatti, nel triangolo $AB\Gamma$ dagli estremi B, Γ di un lato $B\Gamma$, si congiungano due rette internamente $B\Delta$, $\Delta\Gamma$.

Dico che le $B\Delta$, $\Delta\Gamma$ sono minori dei due restanti lati del triangolo BA, $A\Gamma$, ma che comprendono un angolo $B\Delta\Gamma$ maggiore dell'angolo $BA\Gamma$.

Si prolunghi infatti la $B\Delta$ in E. E poiché in ogni triangolo due lati son maggiori del restante (**20**), i due lati AB, AE del triangolo ABE son maggiori di BE; si aggiunga $E\Gamma$, comune; dunque BA, $A\Gamma$ son maggiori di BE, $E\Gamma$ (C 2). Ancora, i due lati ΓE, $E\Delta$ del triangolo $\Gamma E\Delta$ son maggiori di $\Gamma\Delta$; si aggiunga ΔB, comune; dunque ΓE, EB son maggiori di $\Gamma\Delta$, ΔB. Ma BE, $E\Gamma$ si erano dimostrate maggiori di BA, $A\Gamma$; dunque BA, $A\Gamma$ sono molto maggiori di $B\Delta$, $\Delta\Gamma$.

τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΓΕΔ. διὰ ταὐτὰ τοίνυν καὶ τοῦ ΑΒΕ τριγώνου ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ. ἀλλὰ τῆς ὑπὸ ΓΕΒ μείζων ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΒΔΓ· πολλῷ ἄρα ἡ ὑπὸ ΒΔΓ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου ἐπὶ μιᾶς τῶν πλευρῶν ἀπὸ τῶν περάτων δύο εὐθεῖαι ἐντὸς συσταθῶσιν, αἱ συσταθεῖσαι τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ἐλάττονες μέν εἰσιν, μείζονα δὲ γωνίαν περιέχουσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κβ'.

Ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις, τρίγωνον συστήσασθαι· δεῖ δὲ τὰς δύο τῆς λοιπῆς μείζονας εἶναι πάντῃ μεταλαμβανομένας.

Ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι τρεῖς εὐθεῖαι αἱ Α, Β, Γ, ὧν αἱ δύο τῆς λοιπῆς μείζονες ἔστωσαν πάντῃ μεταλαμβανόμεναι, αἱ μὲν Α, Β τῆς Γ, αἱ δὲ Α, Γ τῆς Β, καὶ ἔτι αἱ Β, Γ τῆς Α· δεῖ δὴ ἐκ τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συστήσασθαι.

Ἐκκείσθω τις εὐθεῖα ἡ ΔΕ πεπερασμένη μὲν κατὰ τὸ Δ, ἄπειρος δὲ κατὰ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ μὲν Α

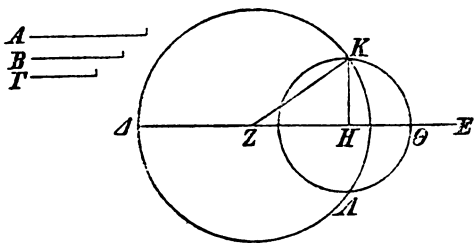
---

22. Euclide non dimostra che i due circoli si tagliano in K. Come nella (**1**), egli ammette come evidente che *se un circolo ha un punto esterno ad un altro circolo, ed un punto interno ad esso, lo taglia*. Non è da escludersi che sotto questa o sotto altra forma, una tale proprietà del circolo

Ancora, poiché in ogni triangolo, l'angolo esterno è maggiore di un interno ed opposto (**16**), dunque nel triangolo $\Gamma\Delta E$ l'angolo esterno $B\Delta\Gamma$ è maggiore di $\Gamma E\Delta$. E per la stessa ragione anche nel triangolo ABE l'angolo ΓEB è maggiore di $BA\Gamma$. Ma si è dimostrato che $B\Delta\Gamma$ è maggiore di ΓEB. Dunque $B\Delta\Gamma$ è molto maggiore di $BA\Gamma$.

Dunque, *se in un triangolo*, etc., c. d. d.

22. — *Con tre rette, che sono eguali a tre date, costruire un triangolo; due di esse devono naturalmente esser maggiori della restante, comunque si prendano* [20].

Siano A, B, Γ le tre rette date, delle quali due son maggiori della restante, comunque prese, A, B

maggiori di Γ; A, Γ di B; e B, Γ di A. Si deve dunque costruire un triangolo con tre rette eguali alle A, B, Γ.

---

si sia potuta trovare nella primitiva redazione dei postulati o delle definizioni.

ἴση ἡ ΔΖ, τῇ δὲ Β ἴση ἡ ΖΗ, τῇ δὲ Γ ἴση ἡ ΗΘ· καὶ κέντρῳ μὲν τῷ Ζ, διαστήματι δὲ τῷ ΖΔ κύκλος γεγράφθω ὁ ΔΚΛ· πάλιν κέντρῳ μὲν τῷ Η, διαστήματι δὲ τῷ ΗΘ κύκλος γεγράφθω ὁ ΚΛΘ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΖ, ΚΗ. λέγω ὅτι ἐκ τριῶν εὐθειῶν τῶν ἴσων ταῖς Α, Β, Γ τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ.

Ἐπεὶ γὰρ τὸ Ζ σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΛ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΖΚ· ἀλλὰ ἡ ΖΔ τῇ Α ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ Α ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ τὸ Η σημεῖον κέντρον ἐστὶ τοῦ ΔΚΘ κύκλου, ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΗΚ· ἀλλὰ ἡ ΗΘ τῇ Γ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ΚΗ ἄρα τῇ Γ ἐστὶν ἴση. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΖΗ τῇ Β ἴση· αἱ τρεῖς ἄρα εὐθεῖαι αἱ ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ τρισὶ ταῖς Α, Β, Γ ἴσαι εἰσίν.

Ἐκ τριῶν ἄρα εὐθειῶν τῶν ΚΖ, ΖΗ, ΗΚ, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς δοθείσαις εὐθείαις ταῖς Α, Β, Γ, τρίγωνον συνέσταται τὸ ΚΖΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κγ'.

Πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ πρὸς αὐτῇ σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ ὑπὸ ΔΓΕ. δεῖ δὴ πρὸς τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσην γωνίαν εὐθύγραμμον συστήσασθαι.

Si prenda una retta ΔE terminata in Δ e infinita verso E e si ponga ΔZ eguale ad A, ZH eguale a B, ed $H\Theta$ eguale a Γ. Con centro Z e con distanza $Z\Delta$ si descriva il circolo $\Delta K\Lambda$; ed ancora con centro H e con distanza $H\Theta$ si descriva il circolo $K\Lambda\Theta$, e si conducano le KZ, KH.

Dico che con tre rette eguali alle A, B, Γ si è costruito il triangolo KZH.

Poiché infatti il punto Z è centro del circolo $\Delta K\Lambda$, la $Z\Delta$ è eguale alla ZK. Ma la $Z\Delta$ è eguale ad A; dunque anche la KZ è eguale ad A (C 1). Ancora, poiché il punto H è centro del circolo $\Lambda K\Theta$, la $H\Theta$ è eguale alla HK. Ma la $H\Theta$ è eguale a Γ; dunque anche la KH è eguale a Γ. Ma anche la ZH è eguale a B. Dunque le tre rette KZ, ZH, HK sono eguali alle tre A, B, Γ.

Dunque con le tre rette KZ, ZH, HK, che sono eguali alle tre rette date A, B, Γ, si è costruito il triangolo KZH; c. d. f.

23. — *Su una retta data ed in un punto dato in essa, costruire un angolo rettilineo eguale ad un angolo rettilineo dato.*

Sia AB la retta data, ed A il punto dato in essa, e sia $\Delta\Gamma E$ l'angolo rettilineo dato.

Si deve dunque sulla retta data AB e nel punto dato in essa A, costruire un angolo rettilineo eguale a $\Delta\Gamma E$.

Εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν ΓΔ, ΓΕ τυχόντα σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΕ· καὶ ἐκ τριῶν εὐθειῶν, αἵ εἰσιν ἴσαι τρισὶ ταῖς ΓΔ, ΔΕ, ΓΕ, τρίγωνον συνεστάτω τὸ ΑΖΗ, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν ΓΔ τῇ ΑΖ, τὴν δὲ ΓΕ τῇ ΑΗ, καὶ ἔτι τὴν ΔΕ τῇ ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν δύο αἱ ΔΓ, ΓΕ δύο ταῖς ΖΑ, ΑΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, καὶ βάσις ἡ ΔΕ βάσει τῇ ΖΗ ἴση, γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΓΕ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΑΗ ἐστὶν ἴση.

Πρὸς ἄρα τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΑΒ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ τῇ ὑπὸ ΔΓΕ ἴσῃ γωνία εὐθύγραμμος συνέσταται ἡ ὑπὸ ΖΑΗ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

κδ'.

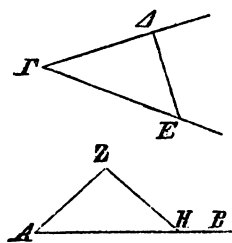
Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δύο πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ πρὸς τῷ Α γωνία τῆς πρὸς τῷ Δ γωνίας, μείζων ἔστω. λέγω ὅτι καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μεῖζον ἐστίν.

---

24. L'enunciato di questo teorema (e così pure quello del teorema successivo), è poco chiaro, quando si traduce alla lettera. Una traduzione libera potrebbe essere questa :

24. *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, cia-*

Si prendano su ognuna delle due $\Gamma\Delta$, ΓE due punti a caso Δ, E e si congiunga la ΔE. E con tre rette, le quali siano eguali alle tre $\Gamma\Delta$, ΔE, ΓE si costruisca il triangolo AZH, cosicché sia $\Gamma\Delta$ eguale ad AZ, ΓE ad AH, e ΔE a ZH (22).

Poiché le due $\Delta\Gamma$, ΓE sono eguali alle due ZA, AH ciascuna a ciascuna, e la base ΔE è eguale alla base ZH, l'angolo $\Delta\Gamma E$ è eguale a ZAH (8).

Dunque su la retta data AB e nel punto dato in essa A, si è costruito l'angolo rettilineo ZAH, eguale all'angolo rettilineo dato $\Delta\Gamma E$; c. d. f.

24. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati ciascuno a ciascuno, ma hanno un angolo maggiore di un angolo, quelli compresi dalle rette eguali, avranno anche la base maggiore della base.*

Siano i due triangoli $AB\Gamma$, ΔEZ aventi i due lati AB, $A\Gamma$ eguali ai due lati ΔE, ΔZ ciascuno a ciascuno, AB eguale a ΔE, ed $A\Gamma$ a ΔZ; e l'angolo in A maggiore dell'angolo in Δ.

Dico che anche la base $B\Gamma$ è maggiore della base EZ.

---

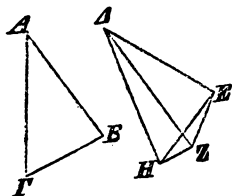
scuno a ciascuno, ma l'angolo compreso dai lati eguali in uno dei due triangoli, è maggiore dell'angolo corrispondente dell'altro triangolo, anche la base del primo triangolo sarà maggiore della base dell'altro.

Ἐπεὶ γὰρ μείζων ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ γωνίας, συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Δ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΕΔΗ, καὶ κείσθω ὁποτέρᾳ τῶν ΑΓ, ΔΖ ἴση ἡ ΔΗ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΗ, ΖΗ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΔΗ, δύο δὴ αἱ ΒΑ, ΑΓ δυσὶ ταῖς ΕΔ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΗ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΗ ἐστὶν ἴση. πάλιν, ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΔΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ὑπὸ ΔΗΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΗ· μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ· πολλῷ ἄρα μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΖΗ τῆς ὑπὸ ΕΗΖ. καὶ ἐπεὶ τρίγωνόν ἐστι τὸ ΕΖΗ μείζονα ἔχον τὴν ὑπὸ ΕΖΗ γωνίαν τῆς ὑπὸ ΕΗΖ, ὑπὸ δὲ τὴν μείζονα γωνίαν ἡ μείζων πλευρὰ ὑποτείνει, μείζων ἄρα καὶ πλευρὰ ἡ ΕΗ τῆς ΕΖ. ἴση δὲ ἡ ΕΗ τῇ ΒΓ· μεῖζον ἄρα καὶ ἡ ΒΓ τῆς ΕΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἔχῃ τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην, καὶ τὴν βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἕξει· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

EUCLIDE svolge soltanto un caso, quello in cui Z cade al di fuori del triangolo ΔEH. Gli altri due casi (in cui Z cade sulla HE, ovvero dentro il triangolo ΔEH) hanno una dimostrazione analoga, ma alquanto piú semplice (svolta da Proclo). SIMSON ha osservato che se si chiama ΔE il piú corto dei due lati ΔE, ΔZ, allora necessariamente Z cade fuori del triangolo ΔEH e si ha il solo caso svolto da Eu-

Poiché infatti l'angolo $BA\Gamma$ è maggiore dell'angolo $E\Delta Z$, sulla retta ΔE e nel punto in essa Δ, si costruisca l'angolo $E\Delta H$ eguale all'angolo $BA\Gamma$ e si ponga ΔH eguale a ciascuna delle due $A\Gamma$, ΔZ, e si congiungano le EH, ZH.

Poiché dunque AB è eguale a ΔE ed $A\Gamma$ a ΔH, le due BA, $A\Gamma$ sono eguali alle due $E\Delta$, ΔH ciascuna a ciascuna, e l'angolo $BA\Gamma$ è eguale all'angolo $E\Delta H$. Dunque la base $B\Gamma$ è eguale alla base EH (4). Ed ancora, poiché ΔZ è eguale a ΔH, l'angolo ΔHZ è eguale all'angolo ΔZH (5).

Dunque ΔZH è maggiore di EHZ (C 5). Dunque EZH è molto maggiore di EHZ (C 5). E poiché il triangolo EZH ha l'angolo EZH maggiore dell'angolo EHZ, e al maggior angolo sottende il maggior lato (19), è dunque il lato EH maggiore di EZ. Ma EH è eguale a $B\Gamma$; dunque $B\Gamma$ è maggiore di EZ.

Dunque, *se due triangoli*, etc., c. d. d.

---

clide. Occorre però dimostrarlo. Si può far così. Sia $\Delta H \geq \Delta E$. Si prolunghi infatti se occorre ΔZ, fino ad incontrare EH in K.

$$\text{allora } \Delta KH > \Delta EK \ (16)$$
$$\Delta EK \geq \Delta HK \ (18)$$
$$\text{quindi } \Delta KH > \Delta HK \text{ quindi } \Delta H > \Delta K \ (19)$$

e poichè $\Delta Z = \Delta H$, $\Delta K < \Delta Z$, quindi Z cade fuori di ΔEH c. d. d.

κε'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο πλευρὰς τὰς ΑΒ, ΑΓ ταῖς δύο πλευραῖς ταῖς ΔΕ, ΔΖ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ· βάσις δὲ ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ μείζων ἔστω. λέγω ὅτι καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας τῆς ὑπὸ ΕΔΖ μείζων ἐστίν.

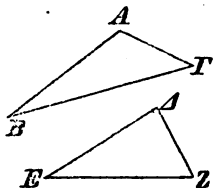
Εἰ γὰρ μή, ἤτοι ἴση ἐστὶν αὐτῇ ἢ ἐλάσσων· ἴση μὲν οὖν οὐκ ἔστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· ἴση γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσει τῇ ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ· οὐδὲ μὴν ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ· ἐλάσσων γὰρ ἂν ἦν καὶ βάσις ἡ ΒΓ βάσεως τῆς ΕΖ· οὐκ ἔστι δέ. οὐκ ἄρα ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῆς ὑπὸ ΕΔΖ. ἐδείχθη δὲ ὅτι οὐδὲ ἴση· μείζων ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῆς ὑπὸ ΕΔΖ.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο πλευρὰς δυσὶ πλευραῖς ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν δὲ βάσιν τῆς βάσεως μείζονα ἔχῃ, καὶ τὴν γωνίαν τῆς γωνίας μείζονα ἕξει τὴν ὑπὸ τῶν ἴσων εὐθειῶν περιεχομένην· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κϛ'.

Ἐὰν δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ

25. — *Se due triangoli hanno due lati eguali a due lati, ciascuno a ciascuno, ed hanno la base maggiore della base, anche un angolo, sarà maggiore di un angolo, quelli compresi dalle rette eguali.*

Siano due triangoli $AB\Gamma$, ΔEZ, aventi i due lali AB, $A\Gamma$ eguali ai due lati ΔE, ΔZ ciascuno a ciascuno, AB eguale a ΔE ed $A\Gamma$ eguale a ΔZ; e la base $B\Gamma$ sia maggiore della base EZ.

Dico che anche l'angolo $BA\Gamma$ è maggiore dell'angolo $E\Delta Z$.

Se infatti non è [maggiore], o è eguale o minore ad esso. Ma non è $BA\Gamma$ eguale a $E\Delta Z$, poiché allora anche la base $B\Gamma$ sarebbe eguale alla base EZ (4). Ma non è. Dunque l'angolo $BA\Gamma$ non è eguale a $E\Delta Z$. E nemmeno è $BA\Gamma$ minore di $E\Delta Z$. Poiché allora anche la base $B\Gamma$ sarebbe minore della base EZ (24). Ma non è. Dunque l'angolo $BA\Gamma$ non è minore di $E\Delta Z$. Ma si è mostrato che non è nemmeno eguale. Dunque $BA\Gamma$ è maggiore di $E\Delta Z$.

Dunque, *se due triangoli*, etc., c. d. d.

26. — *Se due triangoli hanno due angoli eguali a due angoli, ciascuno a ciascuno, ed un lato eguale ad un lato, o quello tra gli angoli eguali, o uno di*

πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει [ἑκατέραν ἑκατέρᾳ] καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ.

Ἔστω δύο τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΔΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ὑπὸ ΑΒΓ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ, τὴν δὲ ὑπὸ ΒΓΑ τῇ ὑπὸ ΕΖΔ· ἐχέτω δὲ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην, πρότερον τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις τὴν ΒΓ τῇ ΕΖ. λέγω ὅτι καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ, τὴν μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, τὴν δὲ ΑΓ τῇ ΔΖ, καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ, τὴν ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ.

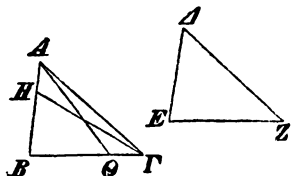
Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ΑΒ, καὶ κείσθω τῇ ΔΕ ἴση ἡ ΒΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΓ.

Ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΗ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, δύο δὴ αἱ ΒΗ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΗΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἴση ἐστίν· βάσις ἄρα ἡ ΗΓ βάσει τῇ

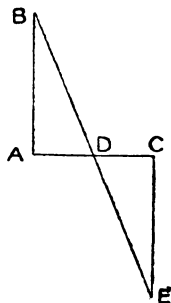
---

26. Questa proposizione, come pure la (**15**) sono attribuite a TALETE, da PROCLO. Secondo la ricostruzione di TANNERY, TALETE il quale secondo PROCLO « avrebbe, per mezzo di questo teorema, trovato il modo di misurare la distanza di una nave in mare, dalla riva », avrebbe fatto così: Fissati sulla spiaggia due punti A, C il loro punto medio D e le due direzioni AB, CE perpendicolari alla

quelli sottendenti gli angoli eguali, avranno anche eguali i restanti lati ai restanti lati [ciascuno a ciascuno], ed il restante angolo al restante angolo.

Siano i due triangoli $AB\Gamma$, ΔEZ aventi i due angoli $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ eguali ai due ΔEZ, $EZ\Delta$ ciascuno a ciascuno, $AB\Gamma$ eguale a ΔEZ, e $B\Gamma A$ a $EZ\Delta$. Ed abbiano un lato eguale ad un lato, e dapprima quello compreso tra gli angoli eguali, $B\Gamma$ eguale a EZ.

Dico che avranno anche i restanti lati eguali ciascuno a ciascuno, AB a ΔE, e $A\Gamma$ a ΔZ; e il restante angolo BAZ eguale al restante angolo $E\Delta Z$.

Se infatti AB non è eguale a ΔE, uno di essi è maggiore. Sia maggiore AB e si ponga BH eguale a ΔE, e si congiunga la $H\Gamma$.

Poiché dunque BH è eguale a ΔE, e $B\Gamma$ a EZ, le due BH, $B\Gamma$ sono eguali alle due ΔE, EZ ciascuna a ciascuna; e l'angolo $HB\Gamma$ è eguale all'angolo ΔEZ. Dunque la base $H\Gamma$ è eguale alla base

AC, quando in A si osservi la nave B che fa l'angolo BAC retto, e da D si osserva che BDE sono in linea retta, la distanza CE che si può poi misurare sul suolo, è uguale alla AB, perché per la (**15**) ADB=CDE, e per la (**26**) ABD=CED, quindi AB=CE.

ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΗΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΕ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΔΖΕ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΒΓΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἴση ἐστίν, ἡ ἐλάσσων τῇ μείζονι· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ· ἴση ἄρα. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ ἴση· δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΔΕΖ ἐστὶν ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Ἀλλὰ δὴ πάλιν ἔστωσαν αἱ ὑπὸ τὰς ἴσας γωνίας πλευραὶ ὑποτείνουσαι ἴσαι, ὡς ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ. λέγω πάλιν ὅτι καὶ αἱ λοιπαὶ πλευραὶ ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσαι ἔσονται, ἡ μὲν ΑΓ τῇ ΔΖ, ἡ δὲ ΒΓ τῇ ΕΖ, καὶ ἔτι ἡ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση ἐστίν.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων, εἰ δυνατόν, ἡ ΒΓ, καὶ κείσθω τῇ ΕΖ ἴση ἡ ΒΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΒΘ τῇ ΕΖ, ἡ δὲ ΑΒ τῇ ΔΕ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΘ δυσὶ ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσιν· βάσις ἄρα ἡ ΑΘ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΘ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΘΑ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΖΔ. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΖΔ τῇ ὑπὸ ΒΓΑ ἐστὶν ἴση· τριγώνου δὴ τοῦ ΑΘΓ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ

ΔZ, e il triangolo $H B \Gamma$ è eguale al triangolo $\Delta E Z$, ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli, quelli a cui sottendono lati eguali (4). Dunque l'angolo $H \Gamma B$ sarà eguale all'angolo $\Delta Z E$. Ma $\Delta Z E$ si è supposto eguale a $B \Gamma A$, dunque $B \Gamma H$ è eguale a $B \Gamma A$ (C 1), il minore al maggiore, il che è impossibile (C 5). Dunque AB non è diseguale a ΔE; dunque è eguale. Ma $B \Gamma$ è eguale ad EZ. Dunque le due AB, $B \Gamma$ sono eguali alle due ΔE, EZ ciascuna a ciascuna; e l'angolo $A B \Gamma$ è eguale all'angolo $\Delta E Z$. Dunque la base $A \Gamma$ è eguale alla base ΔZ, ed il restante angolo $B A \Gamma$ è eguale al restante angolo $E \Delta Z$ (4).

Siano ora invece eguali i lati sottendenti angoli eguali, come AB a ΔE. Dico che i restanti lati saranno eguali ai restanti lati $A \Gamma$ a ΔZ, e $B \Gamma$ ad EZ, e che anche il restante angolo $B A \Gamma$ è eguale al restante angolo $E \Delta Z$.

Se infatti $B \Gamma$ non è eguale ad EZ, uno di essi è maggiore. Sia maggiore, se è possibile, $B \Gamma$, e si ponga $B \Theta$ eguale ad EZ, e si congiunga la $A \Theta$.

E poiché $B \Theta$ è eguale ad EZ, e AB a ΔE, le due AB, $B \Theta$ sono eguali alle due ΔE, EZ, ciascuna a ciascuna, e comprendono angoli eguali. Dunque la base $A \Theta$ è eguale alla base ΔZ, ed il triangolo $A B \Theta$ è eguale al triangolo $\Delta E Z$, ed i restanti angoli saranno eguali ai restanti angoli, quelli a cui sottendono lati eguali. Dunque l'angolo $B \Theta A$ è eguale all' angolo $E Z \Delta$. Ma $E Z \Delta$ è eguale a $B \Gamma A$. Dunque l'angolo esterno $B \Theta A$ del

ὑπὸ ΒΘΑ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΒΓΑ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΕΖ· ἴση ἄρα. ἐστὶ δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΕ ἴση. δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΔΕ, ΕΖ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνίας ἴσας περιέχουσι. βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΔΖ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ ἴσον, καὶ λοιπὴ γωνία ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ λοιπῇ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΔΖ ἴση.

Ἐὰν ἄρα δύο τρίγωνα τὰς δύο γωνίας δυσὶ γωνίαις ἴσας ἔχῃ ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην ἤτοι τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις, ἢ τὴν ὑποτείνουσαν ὑπὸ μίαν τῶν ἴσων γωνιῶν, καὶ τὰς λοιπὰς πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς πλευραῖς ἴσας ἕξει καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κζ'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΕΖ, ΕΖΔ ἴσας ἀλλήλαις ποιείτω. λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Εἰ γὰρ μή, ἐκβαλλόμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ συμπεσοῦνται ἤτοι ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη ἢ ἐπὶ τὰ Α, Γ. ἐκβεβλή-

---

27. AUGUSTUS DE MORGAN ha osservato (*Companion to the almanac* for 1849, p. 8) che la (**27**) è una forma diversa

triangolo $A\Theta\Gamma$ è eguale all'interno ed opposto $B\Gamma\Delta$; il che è impossibile (**16**). Dunque $B\Gamma$ non è diseguale a EZ; dunque è eguale. Dunque le due AB, $B\Gamma$ sono eguali alle due ΔE, EZ, ciascuna a ciascuna, e comprendono angoli eguali. Dunque la base $A\Gamma$ è eguale alla base ΔZ, e il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo ΔEZ, ed il restante angolo $BA\Gamma$ è eguale al restante angolo $E\Delta Z$.

Dunque, *se due triangoli,* etc., c. d. d.

27. — *Se una retta cadendo su due rette fa gli angoli alterni eguali tra loro, le rette saranno parallele tra loro.*

Infatti la retta EZ cadendo sulle due rette AB, $\Gamma\Delta$ formi gli angoli alterni AEZ, $EZ\Delta$ eguali tra loro. Dico che AB è parallela a $\Gamma\Delta$.

Se infatti non è, prolungate le AB, $\Gamma\Delta$ si incontreranno dalla parte B, Δ ovvero dalla parte

---

della (**16**). Si passa dall'una all'altra con la regola di logica: $a, b \,\varepsilon\, \mathrm{Cls.} \supset : a \supset b .=. -b \supset -a$ (cfr. nota alla [**18**]).

Se con a si intende la classe delle coppie di rette che fanno un triangolo con una trasversale, e con b la classe delle coppie di rette che fanno con una trarversale i due angoli alterni (cioè interno ed esterno) non eguali tra loro, allora la (**16**) ha la forma $a \supset b$, e la (**27**) la forma : $-b \supset -a$. Il ragionamento di Euclide è pure, in fondo lo stesso.

Questa nuova forma data da Euclide alla (**16**) ha lo scopo di collegare le proposizioni seguenti (**27**)-(**34**) che trattano delle proprietà delle parallele, con quelle che precedono le quali trattavano delle proprietà dei triangoli.

σθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη κατὰ τὸ Η. τριγώνου δὴ τοῦ ΗΕΖ ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΕΖΗ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα αἱ ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ Β, Δ μέρη. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι οὐδὲ ἐπὶ τὰ Α, Γ· αἱ δὲ ἐπὶ μηδέτερα τὰ μέρη συμπίπτουσαι παράλληλοί εἰσιν· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

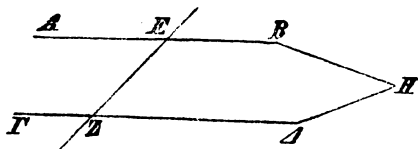
Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιῇ, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κη'.

Ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι.

Εἰς γὰρ δύο εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΕΖ τὴν ἐκτὸς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην ποιείτω ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας. λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ὑπὸ ΑΗΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καὶ εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

A, Γ. Si prolunghino e si incontrino dalla parte B, Δ in H. L'angolo esterno AEZ del triangolo HEZ è eguale all'interno ed opposto EZH, il che

è impossibile (**16**). Dunque le AB, $\Gamma\Delta$ prolungate dalla parte B, Δ non si incontreranno. Allo stesso modo si dimostrerà che nemmeno si incontrano dalla parte A, Γ. Ma se due rette non s'incontrano da nessuna delle due parti son parallele (T **23**). Dunque AB è parallela a $\Gamma\Delta$.

Dunque; *se una retta cadendo,* etc. c. d. d.

28. — *Se una retta cadendo su due rette fa l' angolo esterno eguale all'interno ed opposto dalla stessa parte, ovvero i due interni dalla stessa parte eguali a due retti, le rette saranno parallele tra loro.*

Infatti, la retta EZ cadendo sulle due rette AB, $\Gamma\Delta$ faccia l'angolo esterno EHB eguale all'interno ed opposto $H\Theta\Delta$, ovvero gli angoli interni dalla stessa parte $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ eguali a due retti. Dico che la AB è parallela alla $\Gamma\Delta$.

Poiché infatti EHB è eguale a $H\Theta\Delta$, e poiché EHB è eguale ad $AH\Theta$ (**15**), anche $AH\Theta$ è eguale a $H\Theta\Delta$ (C **1**), e sono alterni. Quindi AB è parallela a $\Gamma\Delta$ (**27**).

Πάλιν, ἐπεὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν· κοινὴ ἀφῃρήσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΘ λοιπῇ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ἐὰν ἄρα εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὴν ἐκτὸς γωνίαν τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἴσην ποιῇ ἢ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας, παράλληλοι ἔσονται αἱ εὐθεῖαι· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

κθ'.

Ἡ εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

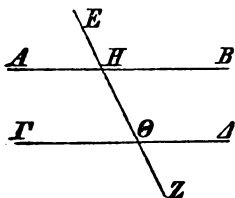
Εἰς γὰρ παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπιπτέτω ἡ ΕΖ. λέγω ὅτι τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΗΘ, ΗΘΔ ἴσας ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς γωνίαν

---

29. Come si è già osservato, questa prop. (**29**) è la prima in cui si adoperi il postulato (P**5**).

A chi ben consideri l'opera di Euclide, la formulazione del (P**5**) appare semplice ed elegante (cfr. la nota alla [**17**]). Per Euclide, due rette tagliate da una terza appaiono come una figura geometrica analoga ad un triangolo (cfr. la nota a [T**22**], pag. 9).

I geometri di ogni epoca si preoccuparono, di sostituire al (P**5**) qualche altro, il quale, assieme alle (**1**)-(**28**) permettesse di dimostrare la (**29**) e le seguenti.

Ancora, poiché $B H \Theta$, $H \Theta \Delta$ sono eguali a due retti, e poiché $A H \Theta$, $B H \Theta$ sono anche eguali a due retti, (**13**), saranno anche $A H \Theta$, $B H \Theta$ eguali a $B H \Theta$, $H \Theta \Delta$ (C **1**). Si tolga $B H \Theta$ comune. Il resto $A H \Theta$ è allora eguale al resto $H \Theta \Delta$ (C **3**), e sono alterni, quindi la AB è parallela alla $\Gamma \Delta$ (**27**).

Dunque *se una retta cadendo,* etc. c. d. d.

29. — *Una retta che cade su due rette parallele fa gli angoli alterni eguali tra loro, l'angolo esterno eguale all'interno ed opposto, e gli angoli interni dalla stessa parte eguali a due retti.*

Infatti sulle rette parallele AB, $\Gamma \Delta$ cada la retta EZ. Dico che essa fa gli angoli alterni $A H \Theta$, $H \Theta \Delta$ eguali, e l'angolo esterno EHB eguale all'in-

---

Ecco alcune delle proposizioni più notevoli che sono state proposte per sostituire il (P **5**).

1. *Due linee rette che si incontrano, non possono essere parallele ad una stessa retta* (PROCLO), (È equivalente alla [**30**] di Euclide).

2. *Esiste un triangolo nel quale la somma degli angoli è eguale a due retti* (LEGENDRE, Mém. de l'Acad. des Sc. XII, p. 367: *Réflexions sur différentes manières de demontrer la théorie des paralleles*).

3. *Esistono due triangoli diseguali, aventi gli angoli eguali.* (SACCHERI, nella sua opera *Euclides ab omni naevo vindicatus* (1733) ovvero nella versione italiana, *L'Euclide*

τὴν ὑπὸ ΕΗΒ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τὰς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας.

Εἰ γὰρ ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ, μία αὐτῶν μείζων ἐστίν. ἔστω μείζων ἡ ὑπὸ ΑΗΘ· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ τῶν ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ μείζονές εἰσιν· ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΑΗΘ, ΒΗΘ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν. αἱ δὲ ἀπ' ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπίπτουσιν· αἱ ἄρα ΑΒ, ΓΔ ἐκβαλλόμεναι εἰς ἄπειρον συμπεσοῦνται· οὐ συμπίπτουσι δὲ διὰ τὸ παραλλήλους αὐτὰς ὑποκεῖσθαι· οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΗΘΔ· ἴση ἄρα. ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΑΗΘ τῇ ὑπὸ ΕΗΒ ἐστὶν ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ ΕΗΒ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΔ ἐστὶν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΒΗΘ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ ταῖς ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἴσαι εἰσίν. ἀλλὰ αἱ ὑπὸ ΕΗΒ, ΒΗΘ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΒΗΘ, ΗΘΔ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

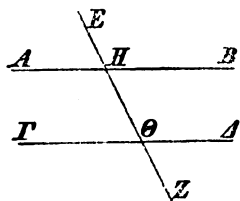
Ἡ ἄρα εἰς τὰς παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τάς τε ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις ποιεῖ καὶ τὴν ἐκτὸς τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴσην καὶ τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

emendato del P. Gerolamo Saccheri, di G. Boccardini, Milano, Hoepli, 1904).

4. *È possibile costruire un triangolo la cui area sia maggiore di qualsivoglia area data* (Gauss, lettera a W. Bolyai, 1799).

terno ed opposto $H\Theta\Delta$, e gli interni dalla stessa parte $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ eguali a due retti.

Infatti se $AH\Theta$ non è eguale a $H\Theta\Delta$, uno di essi è maggiore. Sia maggiore $AH\Theta$. Si aggiunga $BH\Theta$ comune. Allora $AH\Theta$, $BH\Theta$ son maggiori di $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ (C 2). Ma $AH\Theta$, $BH\Theta$ sono eguali a due retti (**13**), dunque $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ son minori di due retti. Ma due rette che fanno gli angoli interni minori di due retti, prolungate all' infinito, si incontrano (P 5). Dunque AB, $\Gamma\Delta$ prolungate all' infinito, si incontreranno; ma non si incontrano perché si son supposte parallele. Non è dunque $AH\Theta$ diseguale a $H\Theta\Delta$. È dunque eguale.

Ma anche $AH\Theta$ è eguale a EHB (**15**). Dunque EHB è eguale a $H\Theta\Delta$ (C **1**). Si aggiunga $BH\Theta$ comune. Dunque EHB, $BH\Theta$ sono eguali a $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ (C 2). Ma EHB, $BH\Theta$ sono eguali a due retti (**13**). Dunque anche $BH\Theta$, $H\Theta\Delta$ sono eguali a due retti.

Dunque *una retta che cade su due rette parallele,* etc, c. d. d.

Una interessante esposizione di questi ed altri metodi si trova nella versione di Euclide di HEATH, vol. I pagine 202–220. Cfr. anche la nota alla successiva (**32**), e BONOLA, *La Geometria non Euclidea*, Bologna, Zanichelli, 1903.

λ'.

Αἱ τῇ αὐτῇ εὐθείᾳ παράλληλοι καὶ ἀλλήλαις εἰσὶ παράλληλοι.

Ἔστω ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΓΔ τῇ ΕΖ παράλληλος· λέγω, ὅτι καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ ἐστι παράλληλος.

Ἐμπιπτέτω γὰρ εἰς αὐτὰς εὐθεῖα ἡ ΗΚ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΑΒ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. πάλιν, ἐπεὶ εἰς παραλλήλους εὐθείας τὰς ΕΖ, ΓΔ εὐθεῖα ἐμπέπτωκεν ἡ ΗΚ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΘΖ τῇ ὑπὸ ΗΚΔ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ ἴση. καὶ ἡ ὑπὸ ΑΗΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΚΔ ἐστὶν ἴση· καί εἰσιν ἐναλλάξ. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ.

Ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λα'.

Διὰ τοῦ δοθέντος σημείου τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν σημεῖον τὸ Α, ἡ δὲ δοθεῖσα

---

30. Euclide non spiega come si possa costruire la *HK*, la quale incontri le altre tre rette.

La proposizione sembra alterata, o monca, il che può anche sospettarsi dal fatto che essa è priva della solita conclusione. Forse Euclide deduceva dal (P 5) che la *HΘ* incontrando la *EZ* doveva anche incontrare la parallela *ΓΔ*?

Ovvero preso a caso *H* su *AB*, e *K* su *ΓΔ* osservava

30. — *Le parallele ad una stessa retta sono anche parallele tra loro.*

Sia ognuna delle AB, $\Gamma\Delta$ parallela alla EZ; dico che la AB è parallela alla $\Gamma\Delta$.

Infatti, le incontri la retta HK.

Poiché HK incontra le rette parallele AB, EZ l'angolo AHK è eguale all'angolo $H\Theta Z$ (29). E poiché ancora HK incontra le parallele EZ, $\Gamma\Delta$, l'angolo $H\Theta Z$ è eguale all'angolo $HK\Delta$ (29). Ma si è dimostrato che AHK è eguale ad $H\Theta Z$; dunque anche AHK è eguale a $HK\Delta$ (C **1**), e sono alterni.

Dunque AB è parallela a $\Gamma\Delta$ (27). c. d. d.

31. *Per un punto dato condurre una linea retta parallela ad una retta data.*

Sia A il punto dato, e sia $B\Gamma$ la retta data.

---

ché essendo EZ *interna* alle due AB, $\Gamma\Delta$, la HK doveva necessariamente tagliarla in Θ?

A. De Morgan ha osservato (*Compan. to the almanac for* 1849, p. 8 che la (**30**) è logicamente equivalente all'altra: *Due rette che si tagliano non possono esser parallele entrambe ad un' altra retta.*

31. Proclo aveva osservato che Euclide pone il problema (**31**) soltanto dopo aver dimostrato la (**30**), dalla quale è facile concludere che da un punto ad una retta si può condurre una sola parallela.

εὐθεῖα ἡ ΒΓ· δεῖ δὴ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλον εὐθεῖαν γραμμὴν ἀγαγεῖν.

Εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΒΓ τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ· καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΔΑ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α τῇ ὑπὸ ΑΔΓ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΔΑΕ· καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας τῇ ΕΑ εὐθεῖα ἡ ΑΖ.

Καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΒΓ, ΕΖ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΑΔ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας τὰς ὑπὸ ΕΑΔ, ΑΔΓ ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΑΖ τῇ ΒΓ.

Διὰ τοῦ δοθέντος ἄρα σημείου τοῦ Α τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ τῇ ΒΓ παράλληλος εὐθεῖα γραμμὴ ἦκται ἡ ΕΑΖ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

λβ'.

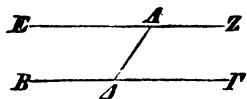
Παντὸς τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἔστω τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, καὶ προσεκβεβλήσθω αὐτοῦ μία πλευρὰ ἡ ΒΓ ἐπὶ τὸ Δ. λέγω ὅτι ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΑΓΔ ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΓΑΒ, ΑΒΓ. καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τρι-

---

32. Questa proposizione è spesso citata da ARISTOTELE, come esempio di una verità accettata da tutti (*Anal. Post.* I, 24, 85 C 5; ibib. 85 C 11; *Metaph.* 1051 a 24). Questo passo della *Metafisica* di ARISTOTELE, come è stato osservato da HEIBERG, si riferisce alla dimostrazione qui data da

Si deve dunque per il punto A condurre una linea retta parallela alla retta $B\Gamma$.

Si prenda sulla $B\Gamma$ un punto Δ a caso, e si congiunga la $A\Delta$; e sulla retta ΔA e sul punto A di essa si costruisca l'angolo ΔAE eguale all'angolo $A\Delta\Gamma$ (23), e si prolunghi per diritto alla EA, la retta AZ.

E poiché la retta $A\Delta$ cadendo sulle due rette $B\Gamma$, EZ fa gli angoli alterni $EA\Delta$, $A\Delta\Gamma$ eguali tra loro, dunque la EAZ è parallela alla $B\Gamma$ (27).

Dunque dal punto dato A, è stata condotta la linea retta EAZ parallela alla retta data $B\Gamma$. c. d. f.

32. — *In ogni triangolo, prolungato un lato, l'angolo esterno è eguale ai due interni ed opposti, ed i tre angoli interni al triangolo sono eguali a due retti.*

Sia il triangolo $AB\Gamma$ e si prolunghi un suo lato $B\Gamma$ in Δ. Dico che l'angolo esterno $A\Gamma\Delta$ è eguale ai due interni ed opposti ΓAB, $AB\Gamma$, e che

---

EUCLIDE; quindi non solo la proposizione, ma anche la dimostrazione sono anteriori ad EUCLIDE.

I Pitagorici, secondo quanto riferisce PROCLO (p. 379) dimostravano questo teorema conducendo invece dal vertice A una parallela alla base $B\Gamma$, ed osservando che gli altri due angoli cosí formati attorno al vertice sono eguali agli altri due angoli del triangolo perché alterni ed interni etc.

Come TARTAGLIA osserva nel suo commento a questa proposizione, è facile estenderla ai poligoni semplici, o stel-

γώνου τρεῖς γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ σημείου τῇ ΑΒ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΓΕ.

Καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΑΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΓΕ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν, ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΕ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΔ, ἡ ἐκτὸς γωνία ἡ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστὶ τῇ ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον τῇ ὑπὸ ΑΒΓ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἴση· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΔ γωνία ἴση ἐστὶ δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ταῖς ὑπὸ ΒΑΓ, ΑΒΓ.

Κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ τρισὶ ταῖς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ, ΓΑΒ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΑΓΔ, ΑΓΒ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΑ, ΓΑΒ ἄρα δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν.

Παντὸς ἄρα τριγώνου μιᾶς τῶν πλευρῶν προσεκβληθείσης ἡ ἐκτὸς γωνία δυσὶ ταῖς ἐντὸς καὶ ἀπεναντίον ἴση ἐστίν, καὶ αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

lati. Così ad es. *in un pentagono stellato la somma dei cinque angoli A, B, C, D, E è eguale a due angoli retti.* Infatti l'angolo *AGF*, esterno del triangolo *EGC*, è eguale ai due interni ed opposti *E, C*; e l'angolo *AFG* esterno del triangolo *DBF* è eguale ai due interni ed opposti *B, D,* dunque, etc.

Questo pentagono stellato, o *pentagramma* era il segno di riconoscimento dei Pitagorici.

La (32) dipende dalla (29), la quale a sua volta dipende dal postulato (P 5). È stato dimostrato nel secolo XIX che

i tre angoli interni del triangolo $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, ΓAB sono eguali a due retti.

Si conduca infatti dal punto Γ alla AB, la retta parallela ΓE.

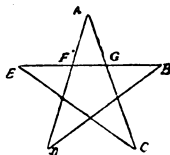
E poiché AB è parallela a ΓE, e su di esse cade la $A\Gamma$, gli angoli alterni $BA\Gamma$, $A\Gamma E$ sono eguali tra loro (29). Ancora, poiché AB è parallela a ΓE, e su di esse cade la $B\Delta$, l'angolo esterno $E\Gamma\Delta$ è eguale all'angolo interno ed opposto $AB\Gamma$ (29). Ma si era già dimostrato che $A\Gamma E$ è eguale a $BA\Gamma$. Dunque tutto l'angolo $A\Gamma\Delta$ è eguale ai due interni ed opposti $BA\Gamma$, $AB\Gamma$ (C 2).

Si aggiunga l' angolo comune $A\Gamma B$; allora i due angoli $A\Gamma\Delta$, $A\Gamma B$ sono eguali ai tre $AB\Gamma$, $B\Gamma A$, ΓAB (C 2). Ma i due angoli $A\Gamma\Delta$, $A\Gamma B$ sono eguali a due retti (13). Dunque anche i tre angoli $A\Gamma B$, ΓBA, ΓAB sono eguali a due retti (C 1).

Dunque *in ogni triangolo*, etc. c. d. d.

---

se non si ammette la (P 5), la (32) non è necessariamente vera, potendosi ai termini *retta, angolo, piano, triangolo,...* dare un senso tale che siano verificate le proposiz. (1)-(28), e non siano invece verificati né la (P 5), né la (32). (BELTRAMI, *Giornale di Matematiche*, Napoli, 1868).

Senza far uso della (P 5), ma soltanto delle nozioni precedenti, si giunge appena a dimostrare la (16) e la (17), dalle quali si deduce soltanto che la (32) è *possibile*.

λγ'.

Αἱ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἔστωσαν ἴσαι τε καὶ παράλληλοι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐπιζευγνύτωσαν αὐτὰς ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΒΔ. λέγω ὅτι καὶ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δύο ταῖς ΒΓ, ΓΔ ἴσαι εἰσίν· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΓ βάσει τῇ ΒΔ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν, καὶ αἱ λοιπαὶ γωνίαι ταῖς λοιπαῖς γωνίαις ἴσαι ἔσονται ἑκατέρα ἑκατέρᾳ, ὑφ' ἃς αἱ ἴσαι πλευραὶ ὑποτείνουσιν· ἴση ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΓΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΒΔ. καὶ ἐπεὶ εἰς δύο εὐθείας τὰς ΑΓ, ΒΔ εὐθεῖα ἐμπίπτουσα ἡ ΒΓ τὰς ἐναλλὰξ γωνίας ἴσας ἀλλήλαις πεποίηκεν, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ. ἐδείχθη δὲ αὐτῇ καὶ ἴση.

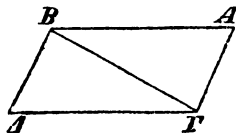
Αἱ ἄρα τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι εὐθεῖαι καὶ αὐταὶ ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

33. Questa proposizione, come Proclo ha osservato, collega la teoria delle parallele con quella dei parallelogrammi.

33. — *Le rette congiungenti dalla stessa parte rette eguali e parallele sono anch'esse eguali e parallele.*

Siano le AB, $\Gamma\Delta$ eguali e parallele, e le congiungano dalla stessa parte le $A\Gamma$, $B\Delta$. Dico che anche $A\Gamma$, $B\Delta$ sono eguali e parallele.

Si conduca la $B\Gamma$.

E poiché la AB è parallela alla $\Gamma\Delta$, e la $B\Gamma$ le incontra, gli angoli alterni $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ sono eguali tra loro (29). E poiché AB è eguale a $\Gamma\Delta$, e la $B\Gamma$ è comune, le due AB, $B\Gamma$ sono eguali alle due $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$; e l'angolo $AB\Gamma$ è eguale all'angolo $B\Gamma\Delta$; dunque la base $A\Gamma$ è eguale alla base $B\Delta$, ed il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo $B\Gamma\Delta$, ed i restanti angoli sono eguali ciascuno a ciascuno, quelli a cui sottendono lati eguali. Dunque l'angolo $A\Gamma B$ è eguale all'angolo $\Gamma B\Delta$ (4). E poiché la retta $B\Gamma$ cadendo sulle due rette $A\Gamma$, $B\Delta$ fa gli angoli alterni eguali tra loro, è dunque la $A\Gamma$ parallela alla $B\Delta$ (27). Ma si è già dimostrato che le è anche eguale.

Dunque, *le rette congiungenti*, etc. c. d. d.

Essa definisce implicitamente che cosa sia un *parallelogrammo*. A partire dalla proposizione successiva, Euclide adopera questa nuova parola senza altri schiarimenti.

λδ'.

Τῶν παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει.

Ἔστω παραλληλόγραμμον χωρίον τὸ ΑΓΔΒ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΒΓ. λέγω ὅτι τοῦ ΑΓΔΒ παραλληλογράμμου αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν, καὶ ἡ ΒΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει.

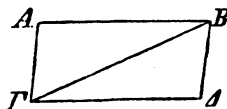
Ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν εὐθεῖα ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. πάλιν ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ εἰς αὐτὰς ἐμπέπτωκεν ἡ ΒΓ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΑΓΒ, ΓΒΔ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. δύο δὴ τρίγωνά ἐστι τὰ ΑΒΓ, ΒΓΔ τὰς δύο γωνίας τὰς ὑπὸ ΑΒΓ, ΒΓΑ δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΒΓΔ, ΓΒΔ ἴσας ἔχοντα ἑκατέραν ἑκα-

---

34. Euclide avrebbe potuto abbreviare la seconda parte di questa dimostrazione osservando che la (**26**) citata in principio già permette di concludere l'eguaglianza dei due triangoli *ΑΒΓ*, *ΒΓΔ*. Si osservi però che questa conseguenza si trae dalla dimostrazione, ma non dal solo enunciato della (**26**). Perciò Euclide forse ha preferito ricorrere alla (**4**).

Il matematico arabo an-NAIRĪZĪ, adoperando le (**33**) e (**34**), ha dato una elegante costruzione della trisezione di una retta (*Anaritii in decem libros priores elementor. Euclidis comm. ex interpretatione Gherardi cremonensis*, ed. Curtze, Leipzig, Teubner, 1899, p. 74). Egli conduce da

34. — *I lati e gli angoli opposti di uno spazio parallelogrammo son eguali tra loro, e il diametro lo divide per metà.*

Sia lo spazio parallelogrammo $A\Gamma\Delta B$, ed il suo diametro $B\Gamma$. Dico che i lati e gli angoli opposti del parallelogramma $A\Gamma\Delta B$ sono eguali tra loro, e che il diametro lo divide per metà.

Poiché infatti la AB è parallela a $\Gamma\Delta$, e la retta $B\Gamma$ cade su di esse, gli angoli alterni $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ sono eguali tra loro (29). E ancora, poiché $A\Gamma$ è parallela a $B\Delta$, e $B\Gamma$ cade su di esse, gli angoli alterni $A\Gamma B$, $\Gamma B\Delta$ sono eguali tra loro (29).

Dunque i due triangoli $AB\Gamma$, $B\Gamma\Delta$ hanno i due angoli $AB\Gamma$, $B\Gamma A$ eguali ai due $B\Gamma\Delta$, $\Gamma B\Delta$ cia-

---

parti opposte della retta data AB da trisecare, dagli estremi AB, due perpendicolari eguali tra loro AC, BD. Bisecata ognuna di queste nei punti E, F, congiunge ED, CF. I due punti d'intersezione G, H di queste congiungenti colla AB, risolvono il problema.

La dimostrazione è facile. Si conduce perciò da H la perpendicolare, etc.

Con una costruzione analoga si può dividere una retta in quante si vogliano parti eguali.

E però piú semplice adoperare per la soluzione di questo problema la teoria delle proporzioni. Cosí fa Euclide nella prop. (9) del libro sesto. Cfr. la nota alla (10).

τέρᾳ καὶ μίαν πλευρὰν μιᾷ πλευρᾷ ἴσην τὴν πρὸς ταῖς ἴσαις γωνίαις κοινὴν αὐτῶν τὴν ΒΓ· καὶ τὰς λοιπὰς ἄρα πλευρὰς ταῖς λοιπαῖς ἴσας ἕξει ἑκατέραν ἑκατέρᾳ καὶ τὴν λοιπὴν γωνίαν τῇ λοιπῇ γωνίᾳ· ἴση ἄρα ἡ μὲν ΑΒ πλευρὰ τῇ ΓΔ, ἡ δὲ ΑΓ τῇ ΒΔ, καὶ ἔτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΓΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΓΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΒΔ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΒΔ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΑΓΔ ἐστιν ἴση. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ τῇ ὑπὸ ΓΔΒ ἴση.

Τῶν ἄρα παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν.

Λέγω δή ὅτι καὶ ἡ διάμετρος αὐτὰ δίχα τέμνει. ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΓΔ, κοινὴ δὲ ἡ ΒΓ, δύο δὴ αἱ ΑΒ, ΒΓ δυσὶ ταῖς ΓΔ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΑΒΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΓΔ ἴση. καὶ βάσις ἄρα ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ ἴση. καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΒΓΔ τριγώνῳ ἴσον ἐστίν.

Ἡ ἄρα ΒΓ διάμετρος δίχα τέμνει τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λε'.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΒΓΖ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλ-

---

35. Euclide sviluppa soltanto il caso piú complicato. Ma il punto *E* potrebbe cadere su *Δ* o nella *ΑΔ*.

scuno a ciascuno, ed un lato eguale ad un lato, quello tra gli angoli eguali, la $B\Gamma$ comune. Perciò anche i restanti lati saranno eguali ai restanti lati, ciascuno a ciascuno, ed il restante angolo, al restante angolo (26). Dunque la AB è eguale alla $\Gamma\Delta$, e la $A\Gamma$ a $B\Delta$, ed ancora l'angolo $BA\Gamma$ eguale a $\Gamma\Delta B$. Ma poiché l'angolo $AB\Gamma$ è eguale a $B\Gamma\Delta$ e $\Gamma B\Delta$ è eguale a $A\Gamma B$, è dunque tutto $AB\Delta$ eguale a tutto $A\Gamma\Delta$ (C 2). Ma già si era dimostrato che $BA\Gamma$ è eguale a $\Gamma\Delta B$.

Dunque i lati e gli angoli opposti di uno spazio parallelogrammo sono eguali tra loro.

Dico poi, che un diametro lo divide per metà. Poiché infatti AB è eguale a $\Gamma\Delta$, e $B\Gamma$ è comune, le due AB, $B\Gamma$ sono eguali alle due $\Gamma\Delta$, $B\Gamma$ ciascuna a ciascuna, e l'angolo $AB\Gamma$ è eguale all'angolo $B\Gamma\Delta$ (29). Dunque il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo $B\Gamma\Delta$ (4).

Dunque il diametro $B\Gamma$ divide per metà il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$, c. d. d.

35. — ***I parallelogrammi sulla stessa base e nelle stesse parallele, sono eguali tra loro.***

Siano i parallelogrammi $AB\Gamma\Delta$, $EB\Gamma Z$ su la stessa base e nelle stesse parallele AZ, $B\Gamma$.

Le dimostrazioni, in questi due casi, già svolte da PROCLO, si ottengono da quella data da Euclide, con alcune lievi semplificazioni.

λήλοις ταῖς ΑΖ, ΒΓ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ.

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΕΖ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΑΔ τῇ ΕΖ ἐστὶν ἴση· καὶ κοινὴ ἡ ΔΕ· ὅλη ἄρα ἡ ΑΕ ὅλῃ τῇ ΔΖ ἐστὶν ἴση. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒ τῇ ΔΓ ἴση· δύο δὴ αἱ ΕΑ, ΑΒ δύο ταῖς ΖΔ, ΔΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΖΔΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΑΒ ἐστὶν ἴση ἡ ἐκτὸς τῇ ἐντός· βάσις ἄρα ἡ ΕΒ βάσει τῇ ΖΓ ἴση ἐστίν, καὶ τὸ ΕΑΒ τρίγωνον τῷ ΔΖΓ τριγώνῳ ἴσον

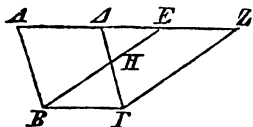
Si noti che in questa proposizione (**35**) compare per la prima volta la parola *eguale* usata in un nuovo senso.

Volendo evitare l'ambiguità, gli scrittori moderni hanno proposto, e sembra questa la via preferibile, di introdurre un nuovo concetto astratto, il concetto di *area*, dicendo cioè che i due parallelogrammi *hanno eguale area,* o *sono eguali in area.*

Legendre invece nella sua *Géométrie* (quatrième édition, Paris, 1802, note I p. 274) propone di chiamar *equivalenti* i due parallelogrammi. Questa denominazione spesso seguita in trattati moderni, ha l' inconveniente di moltiplicare eccessivamente le proposizioni. Bisogna in tal caso ripetere per enti *equivalenti* le nozioni comuni (C **1**), (C **2**), (C **3**). Ed anche cessa in qualche caso la validità della (C **2**), poiché a triangoli eguali aggiungendo triangoli eguali si possono ottenere parallelogrammi non più *eguali* ma appena *equivalenti.*

Si noti infine che nella dimostrazione della (**35**) non occorre l'uso della (C **3**) quando *E* cade tra *A* e *Δ*, ma basta la sola (C **2**).

È stato dimostrato che si può sempre ricondursi a questo caso, ed essere sufficiente l'uso della (C **2**) (la quale afferma che aggiungendo aree eguali ad aree eguali si hanno

Dico che $AB\Gamma\Delta$ è uguale al parallelogrammo $EB\Gamma\Delta$. Poiché infatti $AB\Gamma\Delta$ è un parallelogrammo, $A\Delta$ è uguale a $B\Gamma$ (34). E per la stessa ragione anche EZ è eguale a $B\Gamma$. Quindi anche $A\Delta$ è eguale a EZ (C 1). Ed ancora la ΔE è comune; dunque tutta la AE è eguale a tutta la ΔZ (C 2). Ma ancora, AB è eguale a $\Delta\Gamma$ (34); dunque le due EA, AB sono eguali alle due $Z\Delta$, $\Delta\Gamma$ ciascuna a ciascuna; e l'angolo $Z\Delta\Gamma$ è eguale all'angolo EAB, l'esterno all'interno (29). Dunque la base EB è eguale alla base ΓZ, ed il triangolo EAB sarà anche eguale al triangolo $\Delta Z\Gamma$ (4).

---

aree eguali), *purché si introduca* un postulato (formulato da ARCHIMEDE, *Quadratura della parabola* II ed. Heiberg vol. 2 p. 265), di cui Euclide non fa uso, il quale dice in sostanza che date due aree diseguali si può trovare un numero n tale, che n volte la minore superi la maggiore.

Si è costruita cosí una teoria dell'*equivalenza*, od *eguaglianza addittiva* delle aree delle figure piane, per opera di W. BOLYAI, DUHAMEL, DE ZOLT,... Essa è adoperata in varii trattati scolastiçi italiani moderni.

Si veda per una esposizione completa, l'articolo di U. AMALDI, *Sulla teoria dell'equivalenza*, nelle *Questioni riguardanti la Geometria Elementare*, Bologna, II ed. 1910.

Questa teoria è senza dubbio interessante ed elegante. Essa però sembra assai piú artificiosa di quella Euclidea, non essendovi ragione per non introdurre nell'insegnamento fin da principio anche la nozione comune (C 3).

Euclide l'adopera fin da principio; cfr. le prop. (2), (5)...

ἔσται· κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΗΕ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΑΒΗΔ τραπέζιον λοιπῷ τῷ ΕΗΓΖ τραπεζίῳ ἐστὶν ἴσον· κοινὸν προσκείσθω τὸ ΗΒΓ τρίγωνον· ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον ὅλῳ τῷ ΕΒΓΖ παραλληλογράμμῳ ἴσον ἐστίν.

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λς'.

Τὰ παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

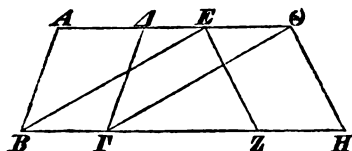
Ἔστω παραλληλόγραμμα τὰ ΑΒΓΔ, ΕΖΗΘ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα τῶν ΒΓ, ΖΗ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΘ, ΒΗ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ.

Ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΒΕ, ΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΓ τῇ ΖΗ, ἀλλὰ ἡ ΖΗ τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ΒΓ ἄρα τῇ ΕΘ ἐστὶν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς αἱ ΕΒ, ΘΓ· αἱ δὲ τὰς ἴσας τε καὶ παραλλήλους ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη ἐπιζευγνύουσαι ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσι. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΒΓΘ. καί ἐστιν ἴσον τῷ ΑΒΓΔ· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει τὴν ΒΓ, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστὶν αὐτῷ ταῖς ΒΓ, ΑΘ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΕΖΗΘ τῷ αὐτῷ τῷ ΕΒΓΘ ἐστιν ἴσον· ὥστε καὶ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τῷ ΕΖΗΘ ἐστὶν ἴσον.

Si tolga $\varDelta HE$, comune. Dunque il restante trapezio $AB H\varDelta$ è eguale al restante trapezio $EH\Gamma Z$ (C 3). Si aggiunga il triangolo $HB\Gamma$, comune. Dunque tutto il parallelogrammo $AB\Gamma\varDelta$ è eguale a tutto il parallelogrammo $EB\Gamma Z$.

Dunque, *i parallelogrammi sulla stessa base*, etc. c. d. d.

36. — *Parallelogrammi su basi eguali e nelle stesse parallele sono eguali tra loro.*

Siano i parallelogrammi $AB\Gamma\varDelta$, $EZH\Theta$ su le basi eguali $B\Gamma$, ZH e nelle stesse parallele $A\Theta$, BH.

Dico che il parallelogramma $AB\Gamma\varDelta$ è eguale a $EZH\Theta$.

Si conducano infatti BE, $\Gamma\Theta$. Poiché $B\Gamma$ è eguale a ZH e ZH è eguale ad $E\Theta$, anche $B\Gamma$ è eguale a $E\Theta$ (C 1). Ma esse sono anche parallele, e le EB, $\Theta\Gamma$ le congiungono. Ma le congiungenti dalla stessa parte di rette eguali e parallele sono anch'esse parallele (33). Perciò $EB\Gamma\Theta$ è un parallelogramma (34), ed esso ancora eguale a $AB\Gamma\varDelta$, poiché hanno la stessa base $B\Gamma$ e sono nelle stesse parallele (35), $B\Gamma$, $A\Theta$. Per la stessa ragione $EZH\Theta$ è eguale allo stesso $EB\Gamma\Theta$. Perciò anche il parallelogrammo $AB\Gamma\varDelta$ è eguale a $EZH\Theta$ (C 1).

Τὰ ἄρα παραλληλόγραμμα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λζ'.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΑΔ, ΒΓ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Ἐκβεβλήσθω ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Ε, Ζ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΕΒΓΑ, ΔΒΓΖ· καί εἰσιν ἴσα· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς εἰσι τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΕΖ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΕΒΓΑ παραλληλογράμ-

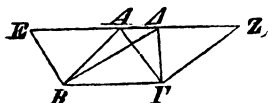
---

37. Questa proposizione e la precedente mostrano come due figure piane possono aver la stessa area, senza aver lo stesso perimetro.

Il credere che il perimetro possa dare un'idea dell'area di una superficie, sembra esser stato un errore comune tra gli antichi scrittori ignari di matematica. TUCIDIDE, VI, 1, stima l'area della Sicilia dal tempo occorrente a navigarle intorno. PLINIO, VI, 208, per confrontare le diverse parti del mondo dice: « aptissime.... spectabitur ad longitudinem « latitudine addita ». QUINTILIANO, *Institutiones oratoriae*, I, cap. x, 39-52, dice: « *De Geometria*.... Falsa quoque veris « similia geometria ratione deprehendit... Nan quis non ita

Dunque *parallelogrammi su basi eguali* etc. c. d. d.

37. — *Triangoli che sono sulla stessa base e nelle stesse parallele sono eguali tra loro.*

Siano i triangoli $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ sulla stessa base $B\Gamma$ e nelle stesse parallele $A\Delta$, $B\Gamma$. Dico che il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo $\Delta B\Gamma$.

Si prolunghi $A\Delta$ da ognuna delle due parti, verso E, Z; da B si conduca la BE parallela alla ΓA, e da Γ si conduca la ΓZ parallela alla $B\Delta$ (**31**).

Dunque $EB\Gamma A$, $\Delta B\Gamma Z$ sono entrambi parallelogrammi, e sono eguali, poiché sono sulla stessa base $B\Gamma$ e nelle stesse parallele $B\Gamma$, EZ (**35**). Ed ancora il triangolo $AB\Gamma$ è la metà del parallelo-

---

« proponenti credat: Quorum locorum estremae lineae eandem mensuram colligunt, eorumque spatio quoque, quod « his lineis continetur par sit necesse est? At id falsum « est. Nam plurimum refert cuius formae sit ille circuitus; « reprehensique a geometris sunt historici, quia magnitudinem insularum satis significari navigationis ambitu crediderunt ». QUINTILIANO enuncia poi correttamente vari teoremi geometrici, ricordando che il circolo è la figura piana di area massima, tra quelle aventi lo stesso perimetro, e ricorre, per convincere i non geometri, ad un esempio numerico osservando che un quadrato avente per lato 10 passi ed i rettangoli aventi per lati 15×5, ovvero 19×1 passi, hanno lo stesso perimetro, ma l'area assai diversa.

μου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· τοῦ δὲ ΔΒΓΖ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΔΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

λη'.

Τὰ τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΕΖ ἐπὶ ἴσων βάσεων τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΑΔ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

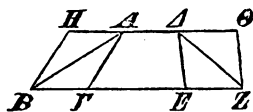
Ἐκβεβλήσθω γὰρ ἡ ΑΔ ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη ἐπὶ τὰ Η, Θ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Β τῇ ΓΑ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΗ, διὰ δὲ τοῦ Ζ τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΘ. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶν ἑκάτερον τῶν ΗΒΓΑ, ΔΕΖΘ· καὶ ἴσον τὸ ΗΒΓΑ τῷ ΔΕΖΘ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΓ, ΕΖ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΖ, ΗΘ· καί ἐστι τοῦ μὲν ΗΒΓΑ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΑΒ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. τοῦ δὲ ΔΕΖΘ παραλληλογράμμου ἥμισυ τὸ ΖΕΔ τρίγωνον· ἡ γὰρ ΔΖ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΔΕΖ τριγώνῳ.

Τὰ ἄρα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

gramma $EB\Gamma A$, poiché il diametro AB divide questo per metà (34). Poi anche il triangolo ΔBI è la metà del parallelogramma $\Delta BZ\Gamma$, poiché anche il diametro $\Delta\Gamma$ lo divide in due parti eguali. Dunque il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo ΔBI.

Dunque *triangoli che sono sulla stessa base* etc. c. d. d.

38. — *Triangoli che sono su basi eguali e nelle stesse parallele sono eguali tra loro.*

Siano i triangoli $AB\Gamma$, ΔEZ sulle basi eguali $B\Gamma$, EZ e nelle stesse parallele BZ, $A\Delta$. Dico che il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo ΔEZ.

Si prolunghi infatti $A\Delta$ da ognuna delle due parti verso H, Θ e per B si conduca alla ΓA la parallela BH, e per Z alla ΔE la parallela $Z\Theta$ (31).

Ognuno dei due $HB\Gamma A$, $\Delta EZ\Theta$ è dunque un parallelogrammo. Ed è $HB\Gamma A$ eguale a $\Delta EZ\Theta$. Poiché sono su basi eguali $B\Gamma$, EZ e nelle stesse parallele BZ, $H\Theta$ (36). Ma il triangolo $AB\Gamma$ è metà del parallelogrammo $HB\Gamma A$; infatti il diametro AB lo divide per metà (34). Ed il triangolo $ZE\Delta$ è metà del parallelogrammo $\Delta EZ\Theta$; infatti il diametro ΔZ lo divide per metà (34). Dunque il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo ΔEZ.

Dunque, *i triangoli che sono su basi eguali*, etc., c. d. d.

λθ'.

Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω ἴσα τρίγωνα τὰ ΑΒΓ, ΔΒΓ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τῆς ΒΓ. λέγω ὅτι καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΔ. λέγω ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΒΓ.

Εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Α σημείου τῇ ΒΓ εὐθείᾳ παράλληλος ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓ τῷ ΔΒΓ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΔΒΓ ἄρα τῷ ΕΒΓ ἴσον ἐστὶ τὸ μεῖζον τῷ ἐλάσσονι· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΕ τῇ ΒΓ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδ' ἄλλη τις πλὴν τῆς ΑΔ· ἡ ΑΔ ἄρα τῇ ΒΓ ἐστὶ παράλληλος.

Τὰ ἄρα ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ τῆς αὐτῆς βάσεως ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη, καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

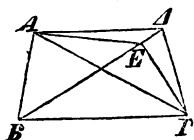
μ'.

[Τὰ ἴσα τρίγωνα τὰ ἐπὶ ἴσων βάσεων ὄντα καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἐστίν].

---

40. Questa proposizione non si trovava nel testo originario, ed è stata aggiunta da qualche commentatore. Così ha pro-

39. — *Triangoli eguali che sono sulla stessa base e dalla stessa parte, sono anche nelle stesse parallele.*

Siano i triangoli eguali $AB\Gamma$, $\Delta B\Gamma$ sulla stessa base $B\Gamma$, e dalla stessa parte di $B\Gamma$. Dico che sono anche nelle stesse parallele.

Si conduca infatti la $A\Delta$. Dico che $A\Delta$ è parallela alla $B\Gamma$.

Se infatti non è, si conduca per il punto A alla retta $B\Gamma$ la parallela AE (**31**), e si congiunga la $E\Gamma$. Allora il triangolo $AB\Gamma$ è eguale al triangolo $EB\Gamma$, poiché è sulla stessa base $B\Gamma$ di esso, e nelle stesse parallele (**37**). Ma $AB\Gamma$ è eguale $\Delta B\Gamma$; dunque anche $\Delta B\Gamma$ è eguale a $EB\Gamma$ (C **1**), il maggiore al minore, il che è impossibile. Dunque AE non è parallela a $B\Gamma$. Similmente dimostreremo che nessun' altra eccetto $A\Delta$ è parallela. Dunque $A\Delta$ è parallela a $B\Gamma$.

Dunque, *triangoli eguali*, etc. c. d. d.

40. — [*Triangoli eguali su basi eguali e dalla stessa parte sono anche nelle stesse parallele*].

---

vato Heiberg (*Hermes*, xxxviii, 1903, p. 50) adoperando un papiro scoperto al Fayum (*Fayūm Towns and their papyri*, p. 96 n. ix).

È da notarsi che il Tartaglia nella sua bella edizione di Euclide sente il bisogno di modificare la dimostrazione. La dimostrazione si conduce come quella della (**39**). La (**40**) non ha nessun uso nel seguito degli *Elementi*.

μα'.

Ἐὰν παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου.

Παραλληλόγραμμον γὰρ τὸ ΑΒΓΔ τριγώνῳ τῷ ΕΒΓ βάσιν τε ἐχέτω τὴν αὐτὴν τὴν ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ἔστω ταῖς ΒΓ, ΑΕ. λέγω ὅτι διπλάσιόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον τοῦ ΒΕΓ τριγώνου.

Ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΑΓ. ἴσον δή ἐστι τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΕΒΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ τῆς αὐτῆς βάσεώς ἐστιν αὐτῷ τῆς ΒΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΕ. ἀλλὰ τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον διπλάσιόν ἐστι τοῦ ΑΒΓ τριγώνου· ἡ γὰρ ΑΓ διάμετρος αὐτὸ δίχα τέμνει· ὥστε τὸ ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμον καὶ τοῦ ΕΒΓ τριγώνου ἐστὶ διπλάσιον.

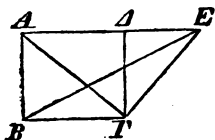
Ἐὰν ἄρα παραλληλόγραμμον τριγώνῳ βάσιν τε ἔχῃ τὴν αὐτὴν καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ᾖ, διπλάσιόν ἐστι τὸ παραλληλόγραμμον τοῦ τριγώνου· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μβ'.

Τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν τρίγωνον τὸ ΑΒΓ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ Δ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

41. — *Se un parallelogrammo ha la stessa base di un triangolo, ed è nelle stesse parallele, il parallelogrammo è doppio del triangolo.*

Abbia infatti il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ la stessa base $B\Gamma$ del triangolo $EB\Gamma$ e sia nelle stesse parallele $B\Gamma$, AE. Dico che il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ è doppio del triangolo $BE\Gamma$.

Si conduca infatti la $\Delta\Gamma$. Il triangolo $AB\Gamma$ è allora eguale al triangolo $EB\Gamma$; poiché essi sono sulla stessa base $B\Gamma$ e nelle stesse parallele $B\Gamma$, AE (37). Ma il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ è doppio del triangolo $AB\Gamma$, poiché il diametro $A\Gamma$ lo divide per metà (34). Dunque anche il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ è doppio del triangolo $EB\Gamma$.

Dunque, *se un parallelogrammo*, etc. c. d. d.

42. — *Costruire in un dato angolo rettilineo un parallelogrammo eguale ad un dato triangolo.*

Sia $AB\Gamma$ il triangolo dato, e Δ l'angolo rettilineo dato. Si deve allora costruire nell'angolo Δ un parallelogrammo eguale al triangolo $AB\Gamma$.

Si divida la $B\Gamma$ per metà in E (10), e si conduca la AE, e sulla retta $E\Gamma$ nel punto E di essa

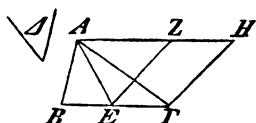
Τετμήσθω ἡ ΒΓ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΕΓ εὐθείᾳ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Ε τῇ Δ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΓΕΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Α τῇ ΕΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΗ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΗ· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΒΕ τῇ ΕΓ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ΑΒΕ τρίγωνον τῷ ΑΕΓ τριγώνῳ· ἐπί τε γὰρ ἴσων βάσεών εἰσι τῶν ΒΕ, ΕΓ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς παραλλήλοις ταῖς ΒΓ, ΑΗ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου. ἔστι δὲ καὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον διπλάσιον τοῦ ΑΕΓ τριγώνου· βάσιν τε γὰρ αὐτῷ τὴν αὐτὴν ἔχει καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς ἐστιν αὐτῷ παραλλήλοις· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΖΕΓΗ παραλληλόγραμμον τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ. καὶ ἔχει τὴν ὑπὸ ΓΕΖ γωνίαν ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Δ.

Τῷ ἄρα δοθέντι τριγώνῳ τῷ ΑΒΓ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΖΕΓΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΓΕΖ, ἥτις ἐστὶν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μγ'.

Παντὸς παραλληλογράμμου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν.

Ἔστω παραλληλόγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, περὶ δὲ τὴν ΑΓ παραλληλόγραμμα μὲν ἔστω τὰ ΕΘ, ΖΗ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΒΚ, ΚΔ. λέγω ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΚ παραπλήρωμα τῷ ΚΔ παραπληρώματι.

si costruisca l'angolo $Z E \Gamma$ eguale all'angolo Δ (23), e per A si conduca la AH parallela ad $E\Gamma$ (**31**), e per Γ la ΓH parallela ad EZ. Dunque $ZE\Gamma H$ è un parallelogrammo. E poiché BE è eguale ad $E\Gamma$, il triangolo ABE è eguale al triangolo $AE\Gamma$, poiché sono su basi eguali BE, $E\Gamma$ e tra le stesse parallele $B\Gamma$, AH (38). Dunque il triangolo $AB\Gamma$ è doppio del triangolo $AE\Gamma$. Ma anche il parallelogrammo $ZE\Gamma H$ è doppio del triangolo $AE\Gamma$, perché ha la stessa base ed è nelle stesse parallele (**41**).

Dunque il parallelogrammo $ZE\Gamma H$ è eguale al triangolo $AB\Gamma$ ed ha l'angolo ΓEZ eguale all'angolo dato Δ.

Dunque si è costruito nell'angolo ΓEZ, che è eguale all'angolo Δ, il parallelogrammo $ZE\Gamma H$, eguale al triangolo dato $AB\Gamma$ c. d. f.

43. — *In ogni parallelogrammo i complementi dei parallelogrammi intorno al diametro sono eguali tra loro.*

Sia il parallelogrammo $AB\Gamma\Delta$ e il diametro di esso $A\Gamma$, e intorno alla diagonale $A\Gamma$ siano i parallelogrammi $E\Theta$, HZ. E siano BK, $K\Delta$ quelli che si chiamano *complementi*. Dico che il complemento BK è eguale al complemento $K\Delta$.

Poiché infatti $AB\Gamma\Delta$ è un parallelogrammo, ed $A\Gamma$ un diametro di esso, il triangolo $AB\Gamma$ è eguale

Ἐπεὶ γὰρ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΑΒΓΔ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΑΓ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΔ τριγώνῳ. πάλιν, ἐπεὶ παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ ΕΘ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἐστιν ἡ ΑΚ, ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὸ ΚΖΓ τρίγωνον τῷ ΚΗΓ ἐστιν ἴσον. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΑΕΚ τρίγωνον τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον, τὸ δὲ ΚΖΓ τῷ ΚΗΓ, τὸ ΑΕΚ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΚΗΓ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘΚ τριγώνῳ μετὰ τοῦ ΚΖΓ. ἔστι δὲ καὶ ὅλον τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὅλῳ τῷ ΑΔΓ ἴσον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΒΚ παραπλήρωμα λοιπῷ τῷ ΚΔ παραπληρώματί ἐστιν ἴσον.

Παντὸς ἄρα παραλληλογράμμου χωρίου τῶν περὶ τὴν διάμετρον παραλληλογράμμων τὰ παραπληρώματα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μδ'.

Παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τῷ δοθέντι τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

Ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ, τὸ δὲ δοθὲν τρίγωνον τὸ Γ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Δ· δεῖ δὴ παρὰ τὴν δοθεῖσαν εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβαλεῖν ἐν ἴσῃ τῇ Δ γωνίᾳ.

Συνεστάτω τῷ Γ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΒΕΖΗ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΕΒΗ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· καὶ κείσθω ὥστε ἐπ' εὐθείας εἶναι τὴν ΒΕ τῇ ΑΒ, καὶ διήχθω ἡ ΖΗ ἐπὶ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁπο-

al triangolo $A\Gamma\Delta$ (34). Ed ancora, poiché $E\Theta$ è un parallelogrammo, e un diametro di esso è AK, il triangolo AEK è eguale al triangolo $A\Theta K$. E per la stessa ragione anche il triangolo $KZ\Gamma$ è eguale al triangolo $KH\Gamma$ (34). Poiché dunque il triangolo AEK è eguale al triangolo $A\Theta K$, e $KZ\Gamma$ a $KH\Gamma$, il triangolo AEK col triangolo $KH\Gamma$, è eguale al triangolo $A\Theta K$ col triangolo $KZ\Gamma$ (C 2).

Ma tutto il triangolo $AB\Gamma$ è eguale a tutto $A\Delta\Gamma$. Dunque il resto, il complemento BK, è eguale al resto, il complemento $K\Delta$ (C 3).

Dunque, *in ogni parallelogrammo*, etc. c. d. d.

44. — *Ad una retta data, in un angolo rettilineo dato, applicare un parallelogrammo eguale ad un triangolo dato.*

Sia AB la retta data, Γ il triangolo dato e Δ l'angolo rettilineo dato. Si deve allora alla retta data AB, in un angolo eguale a Δ, applicare un parallelogrammo eguale al triangolo Γ.

Si costruisca il parallelogrammo $BEZH$ eguale al triangolo Γ, nell'angolo EBH, il quale sia eguale all'angolo Δ (42); e si ponga in modo che la BE sia per diritto alla AB; e si prolunghi la ZH in Θ, e per A si conduca la $A\Theta$ parallela ad ognuna delle due BH, EZ (31), e si conduca la ΘB. Poiché la ΘZ cade sulle due parallele $A\Theta$, EZ, gli

τέρᾳ τῶν ΒΗ, ΕΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΘ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΒ. καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΘ, ΕΖ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΖ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΘΖ, ΘΖΕ γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς εἰσιν ἴσαι. αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΘΗ, ΗΖΕ δύο ὀρθῶν ἐλάσσονές εἰσιν· αἱ δὲ ἀπὸ ἐλασσόνων ἢ δύο ὀρθῶν εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι συμπίπτουσιν. αἱ ΘΒ, ΖΕ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν καὶ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ σημείου ὁποτέρᾳ τῶν ΕΑ, ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἱ ΘΑ, ΗΒ ἐπὶ τὰ Λ, Μ σημεῖα. παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΘΛΚΖ, διάμετρος δὲ αὐτοῦ ἡ ΘΚ, περὶ δὲ τὴν ΘΚ παραλληλόγραμμα μὲν τὰ ΑΗ, ΜΕ, τὰ δὲ λεγόμενα παραπληρώματα τὰ ΛΒ, ΒΖ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΛΒ τῷ ΒΖ. ἀλλὰ τὸ ΒΖ τῷ Γ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καὶ τὸ ΛΒ ἄρα τῷ Γ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΒΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἀλλὰ ἡ ὑπὸ ΗΒΕ τῇ Δ ἐστὶν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΑΒΜ ἄρα τῇ Δ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση.

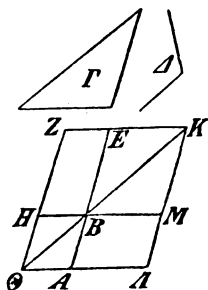
Παρὰ τὴν δοθεῖσαν ἄρα εὐθεῖαν τὴν ΑΒ τῷ δοθέντι τριγώνῳ τῷ Γ ἴσον παραλληλόγραμμον παραβέβληται τὸ ΛΒ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΑΒΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Δ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

με'.

Τῷ δοθέντι εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ εὐθυγράμμῳ.

---

45. Le proposizioni (**42**), (**44**), (**45**) risolvono tre problemi (ciascuno dei quali è più generale del precedente),

angoli $A\Theta Z$, ΘZE sono eguali a due retti (29); perciò gli angoli $B\Theta H$, HZE son minori di due retti. Ma due rette [le quali incontrate da una terza] fanno gli angoli [interni e dalla stessa parte] minori di due retti, prolungate all'infinito si incontrano (P 5). Dunque le ΘB, ZE prolungate si incontreranno.

Si prolunghino, e si incontrino in K, e per K si conduca la $K\Lambda$ parallela ad entrambe le EA, $Z\Theta$ e si prolunghino le ΘA, HB fino ai punti, Λ, M.

Dunque $\Theta\Lambda KZ$ è un parallelogrammo, ΘK un suo diametro, e intorno a ΘK i parallelogrammi AH, ME, e quelli che si chiamano *complementi*, ΛB, BZ. Dunque ΛB è eguale a BZ (43).

Ma BZ è eguale al triangolo Γ, dunque anche ΛB è eguale a Γ (C 1). E poiché l'angolo HBE è eguale a ABM (15), e HBE è eguale a Δ, dunque anche ABM è eguale all'angolo Δ.

Dunque alle rette date AB, nell'angolo ABM che è eguale a Δ, è stato applicato il parallelogrammo ΛB, eguale al triangolo Γ, c. d. f.

45. — *Costruire un parallelogrammo eguale ad una data figura rettilinea, in un angolo rettilineo dato.*

---

relativi alla *trasformazione delle figure piane*. La (45) insegna a trasformare una qualunque figura rettilinea (poli-

Ἔστω τὸ μὲν δοθὲν εὐθύγραμμον τὸ ΑΒΓΔ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία εὐθύγραμμος ἡ Ε· δεῖ δὴ τῷ ΑΒΓΔ εὐθυγράμμῳ ἴσον παραλληλόγραμμον συστήσασθαι ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ τῇ Ε.

Ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ, καὶ συνεστάτω τῷ ΑΒΔ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΖΘ ἐν τῇ ὑπὸ ΘΚΖ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε· καὶ παραβεβλήσθω παρὰ τὴν ΗΘ εὐθεῖαν τῷ ΔΒΓ τριγώνῳ ἴσον παραλληλόγραμμον τὸ ΗΜ ἐν τῇ ὑπὸ ΗΘΜ γωνίᾳ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ Ε. καὶ ἐπεὶ ἡ Ε γωνία ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΘΚΖ, ΗΘΜ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΖ ἄρα τῇ ὑπὸ ΗΘΜ ἐστιν ἴση. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΚΘΗ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ ταῖς ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΖΚΘ, ΚΘΗ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΚΘΗ, ΗΘΜ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. πρὸς δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΗΘ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Θ δύο εὐθεῖαι αἱ ΚΘ, ΘΜ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δύο ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΘΜ· καὶ ἐπεὶ εἰς παραλλήλους τὰς ΚΜ, ΖΗ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΘΗ, αἱ ἐναλλὰξ γωνίαι αἱ ὑπὸ ΜΘΗ ΘΗΖ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν. κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΘΗΛ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ ταῖς ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἴσαι εἰσίν. ἀλλ' αἱ ὑπὸ ΜΘΗ, ΘΗΛ δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· καὶ αἱ ὑπὸ ΘΗΖ, ΘΗΛ ἄρα δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΗ τῇ ΗΛ.

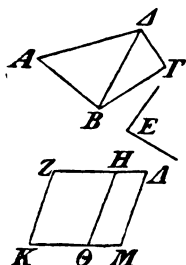
---

gono), in un parallelogrammo, avente un angolo dato ed una base data. Si possono quindi cosí trovare la somma o la differenza di due figure piane.

Soltanto nella (14) del libro II, Euclide insegnerà a

Sia $AB\Gamma\Delta$ la figura rettilinea data, e sia E l'angolo rettilineo dato. Si deve allora costruire un parallelogrammo, nel dato angolo E eguale alla figura rettilinea $AB\Gamma\Delta$.

Si conduca la ΔB, e si costruisca un parallelogrammo $Z\Theta$ nell'angolo ΘKZ che sia eguale all'angolo E (42).

E alla retta $H\Theta$ si applichi il parallelogrammo HM nell'angolo $H\Theta M$ che sia eguale all'angolo E (44).

E poiché l'angolo E è eguale ad ognuno dei due ΘKZ, $H\Theta M$, anche ΘKZ è eguale a $H\Theta M$. Si aggiunge $K\Theta H$, comune. Dunque $ZK\Theta$, $K\Theta H$ sono eguali a $K\Theta H$, $H\Theta M$ (C 2). Ma $ZK\Theta$, $K\Theta H$ sono eguali a due retti (29), dunque anche $K\Theta H$, $H\Theta M$ sono eguali a due retti (C 1). Dunque ad una retta $H\Theta$ ed al punto Θ di essa, le due rette $K\Theta$, ΘM, non poste dalla stessa parte, fanno gli angoli adiacenti eguali a due retti; dunque $K\Theta$ è per diritto alla ΘM (14). E poiché la retta ΘH cade sulle due parallele KM, ZH, gli angoli alterni $M\Theta H$, ΘHZ sono eguali tra loro (29). Si aggiunga $\Theta H\Lambda$ comune. Allora $M\Theta H$, $\Theta H\Lambda$ sono eguali a ΘHZ, $\Theta H\Lambda$. Ma $M\Theta H$, $\Theta H\Lambda$ sono eguali a due retti (29). Dunque anche ΘHZ, $\Theta H\Lambda$ sono eguali a due retti. Dunque la ZH è per diritto alla $H\Lambda$ (14). E poi-

---

trasformare un rettangolo, ovvero una qualunque figura piana in un quadrato.

καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΚ τῇ ΘΗ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν, ἀλλὰ καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΜΛ, καὶ ἡ ΚΖ ἄρα τῇ ΜΛ ἴση τε καὶ παράλληλός ἐστιν· καὶ ἐπιζευγνύουσιν αὐτὰς εὐθεῖαι αἱ ΚΜ, ΖΛ· καὶ αἱ ΚΜ, ΖΛ ἄρα ἴσαι τε καὶ παράλληλοί εἰσιν· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΘ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΔΒΓ τῷ ΗΜ, ὅλον ἄρα τὸ ΑΒΓΔ εὐθύγραμμον ὅλῳ τῷ ΚΖΛΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον.

Τῷ ἄρα δοθέντι εὐθυγράμμῳ τῷ ΑΒΓΔ ἴσον παραλληλόγραμμον συνέσταται τὸ ΚΖΛΜ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΚΜ, ἥ ἐστιν ἴση τῇ δοθείσῃ τῇ Ε· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μϛ'.

Ἀπὸ τῆς δοθείσης εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἔστω ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα ἡ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας τετράγωνον ἀναγράψαι.

Ἤχθω τῇ ΑΒ εὐθείᾳ ἀπὸ τοῦ πρὸς αὐτῇ σημείου τοῦ Α πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΓ, καὶ κείσθω τῇ ΑΒ ἴση ἡ ΑΔ· καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ σημείου τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Β σημείου τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΕ. Παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ μὲν ΑΒ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ΑΔ τῇ ΒΕ. ἀλλὰ ἡ ΑΒ τῇ ΑΔ ἐστὶν ἴση· αἱ τέσσαρες ἄρα αἱ ΒΑ, ΑΔ, ΔΕ, ΕΒ ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ἰσό-

---

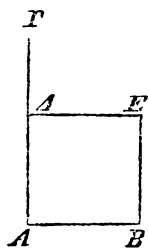
46. Nella (**1**) Euclide aveva insegnato a costruire un triangolo equilatero.

Nelle (**11**), (**15**), (**16**), del libro quarto insegnerà a co-

ché ZK è eguale e parallela a ΘH (**34**), ed anche ΘH ad $M\Lambda$, anche la KZ è eguale e parallela alla $M\Lambda$. E le congiungono le rette KM, $Z\Lambda$. Dunque anche le KM, $Z\Lambda$ sono eguali e parallele (**30**). Dunque $KZ\Lambda M$ è un parallelogrammo. E poiché il triangolo $AB\Delta$ è eguale al parallelogrammo $Z\Theta$, e $\Delta B\Gamma$ è eguale a HM, dunque tutta la figura rettilinea $AB\Gamma\Delta$ è eguale al parallelogrammo $KZ\Lambda M$.

Dunque nell'angolo ZKM, che è eguale all'angolo dato E, si è costruito il parallelogrammo $KZ\Lambda M$ eguale alla data figura rettilinea $AB\Gamma\Delta$; c. d. f.

46. — *Su una retta data descrivere un quadrato.*

Sia AB la retta data; si deve allora sulla retta AB descrivere un quadrato.

Si conduca alla retta AB, dal punto A su di essa la $A\Gamma$ ad angolo retto (**11**) ,e si ponga $A\Delta$ eguale alla AB. E per il punto Δ si conduca la ΔE parallela alla AB, e dal punto B la BE parallela alla $A\Delta$ (**31**).

Dunque $A\Delta EB$ è un parallelogramma, quindi la AB è eguale alla ΔE, e la $A\Delta$ alla BE (**34**); ma AB è eguale alla $A\Delta$; dunque le quattro BA, $A\Delta$, ΔE, EB sono eguali tra loro (**C 1**); dunque il parallelogramma $A\Delta EB$ è equilatero.

---

struire un pentagono regolare, un esagono regolare, ed un pentadecagono regolare.

πλεύρον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ παραλληλόγραμμον. λέγω δὴ ὅτι καὶ ὀρθογώνιον. ἐπεὶ γὰρ εἰς παραλλήλους τὰς ΑΒ, ΔΕ εὐθεῖα ἐνέπεσεν ἡ ΑΔ, αἱ ἄρα ὑπὸ ΒΑΔ, ΑΔΕ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΒΑΔ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΕ. τῶν δὲ παραλληλογράμμων χωρίων αἱ ἀπεναντίον πλευραί τε καὶ γωνίαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσίν· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἑκατέρα τῶν ἀπεναντίον τῶν ὑπὸ ΑΒΕ, ΒΕΔ γωνιῶν.

Ὀρθογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔΕΒ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἰσόπλευρον. τετράγωνον ἄρα ἐστίν· καί ἐστιν ἀπὸ τῆς ΑΒ εὐθείας ἀναγεγραμμένον· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

μζ'.

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἔστω τρίγωνον ὀρθογώνιον τὸ ΑΒΓ ὀρθὴν ἔχον τὴν ὑπὸ ΒΑΓ γωνίαν. λέγω ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ μὲν τῆς ΒΓ τετράγωνον τὸ ΒΔΕΓ, ἀπὸ δὲ τῶν ΒΑ, ΑΓ τὰ ΗΒ, ΘΓ, καὶ διὰ τοῦ Α ὁποτέρᾳ τῶν ΒΔ, ΓΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΔ, ΖΓ. καὶ ἐπεὶ ὀρθή ἐστιν

---

47. Proclo osserva che la tradizione attribuisce questo teorema a Pitagora, il quale avrebbe sacrificato un bue agli Dei per questa scoperta.

Dico che è anche rettangolo. Poiché infatti la retta $A\Delta$ cade sulle parallele AB, ΔE, i due angoli $BA\Delta$, $A\Delta E$ sono eguali a due retti (29). Ma $BA\Delta$ è retto, dunque lo è anche $A\Delta E$. Ma in uno spazio parallelogrammo i lati e gli angoli opposti sono eguali tra loro (34). Dunque son retti ognuno degli angoli opposti ABE, $BE\Delta$.

Dunque $A\Delta EB$ è rettangolo. E già si è dimostrato che è equilatero. Dunque è un quadrato (T 22), ed è descritto sulla retta AB.

47. — ***Nei triangoli rettangoli, il quadrato del lato che sottende l'angolo retto, è eguale ai quadrati dei lati che comprendono l'angolo retto.***

Sia il triangolo rettangolo $AB\Gamma$ avente l'angolo retto $BA\Gamma$. Dico che il quadrato di AB è eguale ai quadrati di BA, $A\Gamma$.

Si costruisca infatti su $B\Gamma$ il quadrato $B\Delta E\Gamma$, e su BA, $A\Gamma$, i quadrati HB, $\Theta\Gamma$ (46), e per A si conduca la $A\Lambda$ parallela ad ognuna delle due $B\Delta$, ΓE (31); e si congiungano le $A\Delta$, $Z\Gamma$.

Plutarco (*Non posse suaviter vivi secundum Epicurum* c. 11), Diogene Laerzio (VIII, 12) ed Ateneo (X, 13) son concordi nell'attribuire a Pitagora questa proposizione.

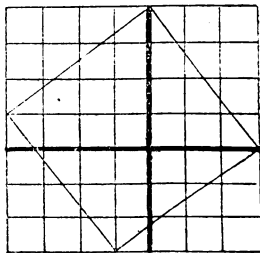
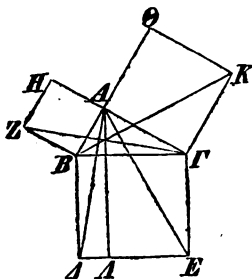
Essa è però forse, assai più antica almeno in un caso semplice, quello in cui i cateti del triangolo rettangolo sono 3, 4 e quindi l'ipotenusa 5.

In un frammento di papiro della XII dinastia egiziana, scoperto a Kahun, M. Cantor (*Archiv. d. Math. u. Phys.*,

ἑκατέρᾳ τῶν ὑπὸ ΒΑΓ, ΒΑΗ γωνιῶν, πρός δή τινι εὐθείᾳ τῇ ΒΑ καὶ τῷ πρὸς αὐτῇ σημείῳ τῷ Α δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΗ μὴ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη κείμεναι τὰς ἐφεξῆς γωνίας δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας ποιοῦσιν· ἐπ' εὐθείας ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ τῇ ΑΗ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ ΒΑ τῇ ΑΘ ἐστὶν ἐπ' εὐθείας. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΒΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΒΑ· ὀρθὴ γὰρ ἑκατέρα· κοινὴ προσκείσθω ἡ ὑπὸ ΑΒΓ· ὅλη ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΒΑ ὅλῃ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἐστὶν ἴση. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΔΒ τῇ ΒΓ, ἡ δὲ ΖΒ τῇ ΒΑ, δύο δὴ αἱ ΔΒ, ΒΑ δύο ταῖς ΖΒ, ΒΓ ἴσαι εἰσὶν ἑκατέρα ἑκατέρᾳ· καὶ γωνία ἡ ὑπὸ ΔΒΑ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΖΒΓ ἴση· βάσις ἄρα ἡ ΑΔ βάσει τῇ ΖΓ ἐστὶν ἴση, καὶ τὸ ΑΒΔ τρίγωνον τῷ ΖΒΓ τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον· καί ἐστι τοῦ μὲν ΑΒΔ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΒΔ παραλληλόγραμμον· βάσιν τε γὰρ τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν

VIII, 1905, p. 66) ha trovato l'eguaglianza $3^2 + 4^2 = 5^2$ scritta in varî modi.

Forse anche gli antichi Babilonesi conoscevano questo risultato, sebbene esso non sia ancora stato ritrovato esplicitamente nei documenti pervenuti fino a noi. (Cfr. M. CANTOR, *Gesch. d. Math.*, III, ed., 1907, p. 49, 50).

Infine anche l'antico astronomo ed astrologo cinese il Duca CHÓU (pronuncia *Ciόu*), zio del re WU (1100 av. Cr.), si servì della eguaglianza $3^2 + 4^2 = 5^2$, che dimostrò per mezzo di questa semplice figura (osservando cioè che il quadrato dell' ipotenusa si ottiene togliendo dal quadrato circoscritto 49, i quattro triangoli rettangoli esterni, ovvero due rettangoli 3×4, ossia

E poiché ognuno dei due angoli $BA\Gamma$, BAH è retto, dunque con una retta BA, e nel punto A di essa, le due rette $A\Gamma$, KH, non poste dalla stessa parte, fanno gli angoli adiacenti eguali a due retti (14). Dunque ΓA è per diritto alla AH. E per la stessa ragione BA è per diritto alla $A\Theta$.

E poiché l'angolo $\Delta B\Gamma$ è eguale all'angolo ZBA, perché ognuno di essi è retto, si aggiunga $AB\Gamma$, comune. Allora tutto ΔBA è eguale a tutto $ZB\Gamma$ (C 2).

E poiché ΔB è eguale a BI e ZB a BA (T 22) dunque le due ΔB, BA sono eguali alle due ZB, $B\Gamma$, ciascuna a ciascuna e l'angolo ΔBA è eguale all'angolo $ZB\Gamma$. Allora la base $A\Delta$ è eguale alla base $Z\Gamma$, ed il triangolo $AB\Delta$ è eguale al triangolo $ZB\Gamma$ (4).

E il parallelogrammo $B\Lambda$ è doppio del triangolo $AB\Delta$, poiché hanno la stessa base $B\Delta$ e sono nelle

---

49 — 24 = 25), e si serví di questo risultato per costruire un angolo retto.

E cosí si fa oggi ancor talvolta in agrimensura, o in topografia quando non si possieda uno strumento piú preciso. Si costruisce con un filo teso e ripiegato, un triangolo di lati, 3, 4, 5, e si ha cosí un angolo retto (48).

Di questo teorema che si chiama ordinariamente di *Pitagora* son state date interessanti ed assai varie dimostrazioni.

Son notevoli tra le altre, una di PAPPO (IV, p. 177), una dell'arabo THABIT IBN QURRA (826-901 d. Cr.), una trovata nei mss. di LEONARDO DA VINCI (1452-1519). Cfr. HEATH, vol. 1 p. 364-368.

ΒΛ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΒΔ, ΑΛ· τοῦ δὲ ΖΒΓ τριγώνου διπλάσιον τὸ ΗΒ τετράγωνον· βάσιν τε γὰρ πάλιν τὴν αὐτὴν ἔχουσι τὴν ΖΒ καὶ ἐν ταῖς αὐταῖς εἰσι παραλλήλοις ταῖς ΖΒ, ΗΓ. ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ΒΛ παραλληλόγραμμον τῷ ΗΒ τετραγώνῳ. ὁμοίως δὴ ἐπιζευγνυμένων τῶν ΑΕ, ΒΚ δειχθήσεται καὶ τὸ ΓΛ παραλληλόγραμμον ἴσον τῷ ΘΓ τετραγώνῳ· ὅλον ἄρα τὸ ΒΔΕΓ τετράγωνον δυσὶ τοῖς ΗΒ, ΘΓ τετραγώνοις ἴσον ἐστίν. καὶ ἔστι τὸ μὲν ΒΔΕΓ τετράγωνον ἀπὸ τῆς ΒΓ ἀναγραφέν, τὰ δὲ ΗΒ, ΘΓ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΒΓ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ πλευρῶν τετραγώνοις.

Ἐν ἄρα τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

μη'.

Ἐὰν τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν.

Τριγώνου γὰρ τοῦ ΑΒΓ τὸ ἀπὸ μιᾶς τῆς ΒΙ πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἔστω τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΙ πλευρῶν τετραγώνοις. λέγω ὅτι ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΒΑΓ γωνία.

stesse parallele $B\Delta$, $A\Lambda$ (**41**). Ed ancora, il quadrato HB è doppio del triangolo $ZB\Gamma$, poiché hanno la stessa base ZB e sono nelle stesse parallele ZB, $H\Gamma$ (**41**). Dunque il parallelogrammo $B\Lambda$ è eguale al quadrato HB.

Similmente, congiunte le AE, BK, si dimostrerà che anche il parallelogrammo $\Gamma\Lambda$ è eguale al quadrato $\Theta\Gamma$.

Dunque tutto il quadrato $B\Delta E\Gamma$ è eguale ai due quadrati HB, $\Theta\Gamma$ (C 2). Ed il quadrato $B\Delta E\Gamma$ è costruito su $B\Gamma$ ed i quadrati HB, $\Theta\Gamma$ su le BA, $A\Gamma$. Dunque il quadrato del lato $B\Gamma$ è eguale ai quadrati dei lati BA, $A\Gamma$.

Dunque, *nei triangoli rettangoli*, etc. c. d. d.

48. — *Se in un triangolo il quadrato di un lato è eguale ai quadrati dei due restanti lati del triangolo, l'angolo compreso dai due restanti lati del triangolo è retto.*

Infatti nel triangolo $AB\Gamma$ sia il quadrato del lato $B\Gamma$ eguale ai quadrati dei lati BA, $A\Gamma$. Dico che l'angolo $BA\Gamma$ è retto.

Si conduca infatti dal punto A la retta $A\Delta$ ad angolo retto alla $A\Gamma$ (**11**) e si ponga la $A\Delta$ eguale alla BA, e si congiunga la $\Delta\Gamma$.

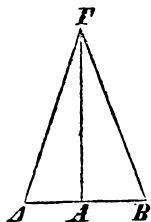
Poiché la ΔA è eguale alla AB, il quadrato della ΔA è eguale al quadrato della AB. Si aggiunga il quadrato della $A\Gamma$ comune. I quadrati di ΔA, $A\Gamma$

Ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α σημείου τῇ ΑΓ εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΔ καὶ κείσθω τῇ ΒΑ ἴση ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ. ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΑ τετράγωνον τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετραγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ τετράγωνον· τὰ ἄρα ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ τετράγωνα ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ τετραγώνοις. ἀλλὰ τοῖς μὲν ἀπὸ τῶν ΔΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ· ὀρθὴ γάρ ἐστιν ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνία· τοῖς δὲ ἀπὸ τῶν ΒΑ, ΑΓ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ· ὑπόκειται γάρ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΔΓ τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΒΓ τετραγώνῳ· ὥστε καὶ πλευρὰ ἡ ΔΓ τῇ ΒΓ ἐστὶν ἴση· καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔΑ τῇ ΑΒ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΓ, δύο δὴ αἱ ΔΑ, ΑΓ δύο ταῖς ΒΑ, ΑΓ ἴσαι εἰσίν· καὶ βάσις ἡ ΔΓ βάσει τῇ ΒΓ ἴση· γωνία ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΑΓ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΒΑΓ ἐστὶν ἴση. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΔΑΓ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ.

Ἐὰν ἄρα τριγώνου τὸ ἀπὸ μιᾶς τῶν πλευρῶν τετράγωνον ἴσον ᾖ τοῖς ἀπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν τετραγώνοις, ἡ περιεχομένη γωνία ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν ὀρθή ἐστιν· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

---

48. In questa dimostrazione EUCLIDE ammette che: *se due quadrati sono eguali, sono eguali anche le loro basi.* Già PROCLO aveva sentito il bisogno di dimostrare questa proposizione, e la sua inversa, e piú recentemente DE MOR-

sono dunque eguali ai quadrati di BA, $A\Gamma$ (C 2). Ma il quadrato di $\Delta\Gamma$ è eguale ai quadrati di ΔA, $A\Gamma$, infatti l'angolo $\Delta A\Gamma$ è retto (**47**); ed il quadrato di $B\Gamma$ è eguale ai quadrati di BA, $A\Gamma$, ciò infatti si è supposto. Dunque anche il quadrato di $\Delta\Gamma$ è eguale al quadrato di $B\Gamma$ (C **1**), perciò anche la $\Delta\Gamma$ è eguale alla $B\Gamma$. Ma poiché anche la ΔA è eguale alla AB, e la $A\Gamma$ è comune, le due ΔA, $A\Gamma$ sono eguali alle due BA, $A\Gamma$, e la base $\Delta\Gamma$ è eguale alla base $B\Gamma$; dunque l'angolo $\Delta A\Gamma$ è eguale all'angolo $BA\Gamma$ (**8**). Ma $\Delta A\Gamma$ è retto, dunque anche $BA\Gamma$ è retto.

Se dunque, *in un triangolo,* etc. c. d. d.

GAN (*Companion to the Almanac for* 1849, p. 8) aveva pure proposto di introdurle dopo la (**46**).

Ma la verità della inversa, cioè: *sono eguali i quadrati costruiti su basi eguali* si deduce colla semplice applicazione di un principio logico il quale dice che: *se su due enti eguali si eseguisce la stessa operazione, i risultati sono eguali* (cfr. PEANO, *Aritmetica* etc. p. 49).

La proposizione diretta si dimostra subito osservando che se due rette sono diseguali, i quadrati costruiti su di esse sono diseguali, e quindi con una semplice regola di logica (enunciata nella nota alla (**18**), p. 46) si deduce la proposizione. Queste osservazioni possono spiegare perché Euclide non abbia creduto opportuno enunciare esplicitamente le due proposizioni.

GLOSSARIO

In un primo studio è conveniente, leggere rapidamente i *postulati* e le *nozioni comuni*, e poi subito la prima proposizione (p. **7**), tralasciando le lunghe spiegazioni dei *termini geometrici*, poiché esse, pur avendo avuto ragione di essere per i greci, sono poco utili a noi, ai quali questi termini sono notissimi e fanno oramai parte della lingua comune.

Per facilitar l'uso di questo glossario, sono perciò state escluse le parole, appartenenti alla lingua comune dei greci, le quali compaiono soltanto nelle pp. **1–6**.

Dei verbi sono date le varie forme adoperate nel testo, sotto la forma dell'infinito presente. Delle altre parole è data soltanto una delle forme adoperate.

ἄγειν condurre
  ἤχθω, *ἤχθωσαν*, *ἦκται*, *ἀγαγεῖν*
αἰτεῖν domandare
  ᾐτήσθω
αἰτήματα postulati
ἀδύνατον impossibile
ἀλλά ma
ἀλλήλους l'un l'altro
ἀναγράφειν costruire
  ἀναγεγράφθω, *ἀναγράψαι*, *ἀναγραφέν*, *ἀναγεγραμμένον*
ἄνισος diseguale
ἄπειρος infinito
ἀπεναντίον opposto
ἀπό da
ἄρα dunque
ἀρχή principio
ἄτοπος assurdo
αὐτός stesso
ἀφαιρεῖν togliere
  ἀφαιρεθῇ, *ἀφῃρήσθω*, *ἀφῄρηται*, *ἀφελεῖν*
βάσις base
γάρ poiché
γράφειν descrivere
  γράφεσθαι, *γεγράφθω*

γραμμή linea
γωνία angolo
δέ poi
δεικνύναι dimostrare
δείξομεν, δεῖξαι, ἐδείχθη, ἐδείχθησαν, δειχθήσεται
δεῖν esser necessario
δεῖ, ἔδει
δή dunque
διά per
διάγειν condurre
διήχθω
διάμετρος diagonale, diametro
διάστημα distanza
διδόναι dare
δοθέν, δοθέντος, δοθέντι, δοθεῖσα, δοθείσης, δοθείσῃ, δοθεῖσαν, δοθεῖσαι, δοθεισῶν, δοθείσαις
διπλάσιος doppio
δίχα per metà
δυνατόν possibile
δύο due
ἐάν se
εἰ se
εἶναι essere
ἐστίν, εἰσίν, ἔστω, ἔστωσαν, ἔσται, ἔσονται, ὦσιν, ᾖ, ὄντα
εἰς verso
ἑκάτερος l'uno e l'altro
ἐκ da
ἐκτός fuori
ἐκβάλλειν prolungare
ἐκβεβλήσθω, ἐκβεβλήσθωσαν, ἐκβαλεῖν, ἐκβαλλομένας, ἐκβαλλόμεναι
ἐκκεῖσθαι esser preso
ἐκκείσθω
ἐλάσσων minore
ἐμπίπτειν incontrare
ἐμπιπτέτω, ἐμπέπτωκεν, ἐνέπεσεν, ἐμπίπτουσα
ἐν in
ἐντός entro
ἐναλλάξ alternamente
ἔννοια nozione
ἐξ da
ἐπεί poiché
ἐπί su, per
ἐπιζευγνύναι congiungere
ἐπιζευγνύουσιν, ἐπεζεύχθω, ἐπεζεύχθωσαν, ἐπιζευγνύτωσαν, ἐπιζευχθεῖσα, ἐπιζευγνύουσαι, ἐπιζευγνυμένων
ἕτερος altro
εὐθεία retta
εὐθύγραμμον rettilineo
ἐφαρμόζειν coincidere
ἐφαρμόζοντα, ἐφαρμοζομένης, ἐφαρμοζομένου, ἐφαρμόσει, ἐφαρμοσάσης, ἐφαρμόσαντος, ἐφαρμόσουσιν
ἐφεξῆς di seguito
ἐφιστάναι erigere
ἐφέστηκεν, ἐφεστηκυῖα
ἔχειν avere
ἔχει, ἔχουσιν, ἐχέτω, ἔχῃ, ἔχον, ἔχοντα, ἔχουσαν, ἔχουσαι, ἕξει
ἤ che
ἥμισυ metà

ἤτοι ovvero
ἴσος eguale
ἰσόπλευρον equilatero
ἰσοσκελές isoscele
κάθετος cateto
καί e
καλεῖν chiamare
καλεῖται
κατά per, ad
καταλειπόμενον rimanente
κεῖσθαι esser posto
κείσθω, *κείμεναι*
κέντρον centro
κοινή comune
κορυφή vertice
κύκλος circolo
λαμβάνειν prendere
εἰλήφθω
λέγειν dire
λέγω, *λεγόμενα*
λείπειν lasciare
λοιπός resto
μείζων maggiore
μέν pure, bensì
μέρος parte
μετά con
μεταλαμβάνειν permutare
μεταλαμβανόμεναι, *μεταλαμβανομένας*
μή non
μηδέτερος nessun dei due
μία una
νῦν ora
ὁ il
ὅλος intero
ὁμοίως similmente
ὀξύς acuto
ὅπερ ciò che
ὁπότερος qual dei due
ὀρθογώνιος ortogonale, rettangolare
ὀρθός retto
ὅταν quando
ὅτι che
ὅς il quale, che
οὐδέ né
οὐθέν niente
οὐ(κ) non
οὖν dunque
πάλιν di nuovo
πᾶς tutto
παρά ad
παραβάλλειν applicare
παραβεβλήσθω, *παραβέβληται*, *παραβαλεῖν*
παραλληλόγραμμον parallelogrammo
παράλληλος parallelo
παραπλήρωμα complemento
πεπερασμένη terminata
περί intorno
περιέχειν comprendere
περιέχουσιν, *περιέξουσιν*, *περιεχουσῶν*, *περιεχομένη*, *περιεχομένην*
πλευρά lato
πλήν eccetto
πολύς molto
ποιεῖν fare
ποιεῖ, *ποιοῦσιν*, *ποιῇ*, *ποιῶσιν*, *ποιείτω*, *ποιείτωσαν*, *ποιῆσαι*, *ποιήσει*, *πεποίηκεν*
πρός verso

προσεκβάλλειν prolungare
προσεκβεβλήσθω, προσεκβεβλήσθωσαν, προσεκβληθείσης, προσεκβληθεισῶν
προσκεῖσθαι essere aggiunto
προσκείσθω
προστιθέναι aggiungere
προστεθῇ
σημεῖον punto
σταθεῖσα eretta
συμπίπτειν concorrere
συμπίπτουσιν, συμπίπτουσαι, συμπεσοῦνται, συμπιπτέτωσαν
συνιστάναι costruire
συνεστάτω, συνέσταται, συνεστάτωσαν, συνίστανται, συστήσασθαι, συσταθῶσιν, συσταθήσονται, συσταθεῖσαι
συνεχές continuo
σχῆμα figura
τέμνειν dividere
τέμνει, τέμνουσιν, τέμνωσιν, τετμήσθω, τέτμηται, τεμεῖν, τετμημένης
τέσσαρες quattro
τετράγωνον quadrato
τιθέναι porre
θέσθαι, τιθεμένου
τίς alcuno
τραπέζιον trapezio
τρεῖς tre
τρίγωνον triangolo
τυχόν a caso
ὑπερέχειν superare
ὑπό da
ὑποκεῖσθαι supporre
ὑπόκειται
ὑποτείνειν sottendere
ὑποτείνει, ὑποτείνουσιν, ὑποτείνουσα, ὑποτεινούσης, ὑποτείνουσαν, ὑποτείνουσαι
χωρίον spazio
ὡς come
ὥστε sicché